Electromagnetismo II

Guía 3 – 8 de septiembre de 2017

Tema: Ondas en medios materiales. Paquetes de onda. Relaciones de dispersión.

Problema 1: Una onda plana linealmente polarizada incide normalmente sobre una interfaz estratificada, tal como se muestra en la figura. Los indicies de refracción de los tres medios no permeables son n_1, n_2 y n_3. El espesor de la capa intermedia es d.

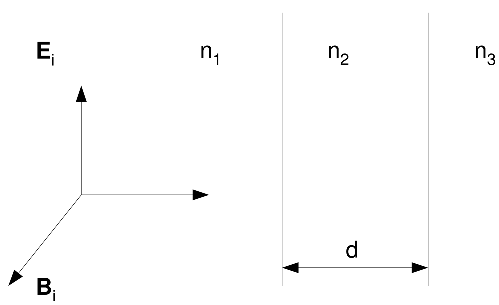
a) Calcule los coeficientes de transmisión y reflexión y represente su comportamiento en función de la frecuencia para

a$_1$) $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$

a$_2$) $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$

a$_3$) $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 1$.

b) Suponga que el medio n_1 forma parte de un sistema óptico (por ejemplo, una lente) y el medio n_3 es aire ($n_3 = 1$). Se desea colocar otro medio n_2 en la superficie de separación, de modo que no haya onda reflejada para cierta frecuencia ω_0. ¿Qué espesor d y que índice de refracción se requieren?



Problema 2: Una onda electromagnética plana, polarizada linealmente de frecuencia ω en el vacío, incide normalmente sobre la superficie plana de un medio no permeable de conductividad σ y constante dieléctrica ϵ.

a) Calcule la amplitud y la fase de la onda reflejada en función de los valores para la onda incidente para σ y ϵ arbitrarios.

b) Discuta los casos límites de un conductor muy pobre y de uno muy bueno, y muestre que para un buen conductor el coeficiente de reflexión R (cociente de la intensidad reflejada sobre la incidente) es aproximadamente

$$R \approx 1 - 2\frac{\omega}{c}\delta, \tag{1}$$

donde δ es la profundidad de penetración.

Problema 3: Un modelo idealizado de la ionósfera terrestre es un medio descripto por la constante dieléctrica

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right) \tag{2}$$

donde $\omega_p = \sqrt{NZe^2/m\epsilon_0}$ y NZ es la densidad de electrones y m la masa del electrón. Suponga que la Tierra esta rodeada por un medio de esa naturaleza que empieza bruscamente a una altura h y se extiende hasta el infinito. Para ondas con su polarización tanto perpendicular al plano de incidencia (procedentes de una antena horizontal) como en el plano de incidencia (procedentes de una antena vertical):

a) Demuestre a partir de las ecuaciones de Fresnel que para $\omega > \omega_p$ hay un rango de ángulos de incidencia para el cual la reflexión no es total, pero que para ángulos mayores la reflexión es total y las ondas son devueltas hacia la Tierra.

b) Teniendo en cuenta cualitativamente que la ionosfera puede ser aproximada por un capa de espesor finito, correlacione el comportamiento que obtuvo en a) al fenómeno de "saltos" (skipping) en las transmisiones radiales nocturnas (un observador puede recibir estaciones distantes, ubicadas mas allá de una distancia de salto D, pero no puede recibir estaciones mas cercanas). Estime la distancia de salto D para una frecuencia de $1,5 \times 106\, Hz$, suponiendo que la densidad electrónica es $n_0 = 3000\, cm^{-3}$ y que $h = 100\, km$.

Problema 4: Un haz de luz no polarizada, monocromática, incide sobre la interfase plana entre dos dieléctricos. Determine el coeficiente de reflexión y la polarización de la luz reflejada y refractada, si el ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster.

Problema 5: Muestre que una onda linealmente polarizada en general se vuelve elípticamente polarizada luego de reflexión total desde la superficie de un dieléctrico. Bajo qué condiciones la polarización será circular? Encuentre el flujo de energía a lo largo de la superficie, y en la dirección perpendicular, en el medio desde el cual ocurre la reflexión.

Problema 6: Una onda plana linealmente polarizada incide normalmente desde la izquierda sobre la interfase plana de separación entre dos medios. Suponga que el medio de la izquierda es transparente y el de la derecha es disipativo. Calcule el flujo de energía en función de la coordenada perpendicular a la interfase, en ambos medios. Interprete físicamente.

Problema 7: Repita el problema 6 suponiendo que ambos medios son disipativos. Luego interpete en general en qué condiciones se cumple que el vector de Poynting para el campo total (incidente más reflejado) en un medio arbitrario como el de la izquierda, coincide con la suma de los vectores de Poynting individuales para cada uno de los campos.

Problema 8: Un paquete de ondas aproximadamente monocromáticas en una dimensión tiene la forma $u(x) = f(x)\, e^{ik_o x}$, siendo $f(x)$ la envolvente. Calcule, para cada una de las $f(x)$ detalladas, el espectro de número de ondas del paquete, $|A(k)|^2$, represente a $|u(x,0)|^2$ y a $|A(k)|^2$,

evalúe explícitamente las desviaciones cuadráticas medias Δx y Δk, definidas en términos de la intensidades $|u(x)|^2$ y $|A(k)|^2$, y verifique la desigualdad $\Delta x\,\Delta k \geq 1/2$.
a) $f(x) = Ne^{-\alpha|x|/2}$
b) $f(x) = N\exp\left(-\alpha^2 x^2/4\right)$
c) $f(x) = N(1-\alpha|x|)$ si $\alpha|x| < 1$ y 0 para $\alpha|x| > 1$.
d) $f(x) = N$ si $|x| < a$, y $f(x) = 0$ si $|x| > a$.

Problema 9: Un paquete de onda Φ está formado por la superposición de ondas planas de diferentes frecuencias. La función amplitud está dada por $a(\omega) = a_0 e^{-\left(\frac{(\omega-\omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2}\right)}$, donde a_0, ω_0 y $\Delta\omega$ son constantes. Encuentre la amplitud del paquete como función del tiempo en el punto $x = 0$. Determine la relación entre el largo del paquete de onda Δt y el rango de frecuencias $\Delta\omega$.

Problema 10: Investigue la dispersión de un paquete de onda unidimensional en un medio dispersivo. Suponga que la función de amplitud está dada por $a(k) = a_0\exp\left[-\alpha(k-k_0)^2\right]$ y retenga todos los términos, incluyendo hasta segundo orden, en la expansión de ω en términos de k.

Problema 11: Utilice la relación de Kramers-Kronig para calcular la parte real de $\epsilon(\omega)$, dada la parte imaginaria de $\epsilon(\omega)$, cuando $\omega > 0$ y de la forma

- a) $\Im(\epsilon) = \lambda\left[\Theta(\omega-\omega_2) - \Theta(\omega-\omega_1)\right]$, si $\omega_2 > \omega_1 > 0$
- b) $\Im(\epsilon) = \lambda\gamma\omega/\left[(\omega_0^2-\omega^2) + \gamma^2\omega^2\right]$.

Esquematice, en cada caso, el comportamiento de $\Im(\epsilon(\omega))$ y el resultado obtenido para $\Re(\epsilon(\omega))$, como funciones de ω. Argumente acerca de las analogías o diferencias entre los resultados obtenidos para a) y b).

Problema 12: Una onda plana circularmente polarizada que se mueve en la dirección z tiene una extensión finita en las direcciones x e y. Suponiendo que la modulación de amplitud varía lentamente (el "ancho" de la onda es grande comparado con la longitud de onda), muestre que los campos eléctrico y magnético están dados aproximadamente por,

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) \approx \left[E_0(x,y)(\hat{e}_1 \pm \hat{e}_2) + \frac{i}{k}\left(\frac{\partial E_0}{\partial x} \pm i\frac{\partial E_0}{\partial y}\right)\hat{e}_3\right] e^{i(kz-\omega t)}$$

y

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t) \approx \mp i\sqrt{\mu\epsilon}\boldsymbol{E}.$$

Donde $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ y $\hat{e}_3$ son los versores cartesianos usuales.