Electromagnetismo II

Guía 6
20 de Octubre de 2017

Tema: Radiación electromagnética

Problema 1: Compruebe que los potenciales

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3y \frac{[\rho(\boldsymbol{y}, t')]_{ret}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \ ,$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3y \frac{[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}, t')]_{ret}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \ ,$$

donde $[\cdots]_{ret}$ indica que t' es el tiempo retardado $t' = t - |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|/c$, satisfacen la condición de Lorentz

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + c^{-2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \ ,$$

como consecuencia de la ecuación de continuidad para la densidad de carga ρ y la densidad de corriente $\boldsymbol{J}$.

Problema 2: Considere una carga positiva de magnitud $2q$ y dos cargas negativas, cada una de magnitud $-q$, que oscilan simétricamente en una linea alrededor de la carga central positiva de manera que sus posiciones son $z(t) = \pm a \cos(\omega t)$ ($a > 0$, $\omega > 0$). Determine los momentos multipolares de menor orden, la distribución angular de la radiación emitida y la potencia total irradiada.

Problema 3: Las mitades de una capa esférica de radio R y conductividad perfecta están separadas por un capa aislante muy delgada. Entre los hemisferios se aplica un potencial alterno de modo que el potencial en el hemisferio sea $\pm V \cos(\omega t)$ ($V, \omega > 0$). En el caso de longitudes de onda grandes, calcule los campos de radiación, la distribución angular de dicha radiación y la potencia total irradiada.

Problema 4: Un anillo de radio R y carga Q distribuida uniformemente en él, rota con velocidad angular ω alrededor de un diámetro. ¿Cuál es la potencia irradiada?

Problema 5: Una carga puntual de magnitud q gira a velocidad angular constante ω en una órbita circular de radio a. Encuentre los campos electromagnéticos a distancias grandes relativas a a debidos a esta carga suponiendo que el movimiento es no-relativista. Determine el promedio temporal de la distribución angular y de la intensidad de radiación. Investigue la polarización de la radiación.

Problema 6: Un cuadrupolo radiante consiste en un cuadrado de lado a con cargas negativas y positivas de magnitud $\pm q$ alternadas. Este cuadrado rota alrededor de su centro con velocidad angular ω. Calcule: los momentos cuadrupolares; la distribución angular de la radiación emitida; la potencia irradiada; y los campos de radiación para la aproximación de longitudes de onda grandes.

Problema 7: En la recta x se colocan siete antenas que irradian como dipolos eléctricos polarizados en la dirección z. Las antenas están ubicadas en los puntos $x = 0,\ \pm\lambda/2,\ \pm\lambda,\ \pm 3\lambda/2$ y están todas en fase emitiendo con longitud de onda λ.

a) Calcule la distribución angular de la potencia irradiada en términos de los ángulos polar θ y azimutal φ.

b) Haga un diagrama cualitativo de la distribución de potencia irradiada en el plano $x - y$.

c) Considere la dirección en la cual la potencia irradiada es máxima y compare con el caso de una sola antena.

Problema 8: Una varilla de longitud 2ℓ y masa despreciable puede girar libremente en un plano alrededor de su punto medio. En una punta hay una masa de carga q y en la otra otra carga q de masa despreciable. Inicialmente la varilla se encuentra quieta y levemente desplazada (por un ángulo φ_o) de su posición de equilibrio vertical con la masa abajo. Entonces efectúa oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio. Determine el valor promedio de la intensidad de radiación del sistema.
Desprecie los efectos del frenado por radiación suponiendo que, por unidad de tiempo, la energía mecánica es mucho mayor que la energía irradiada.

Problema 9: Una esfera homogenea de radio R y carga Q gira con velocidad angular constante ω alrededor de un diámetro. El eje de rotación forma un ángulo θ con la dirección de un campo magnético externo constante y uniforme $\boldsymbol{H}$.

a) Hallar los campos irradiados.

b) Hallar la intensidad de radiación.

Desprecie los efectos del frenado por radiación suponiendo que, por unidad de tiempo, la energía mecánica es mucho mayor que la energía irradiada.
Recuerde que el momento angular está dado por $\boldsymbol{L} = I\omega$ donde $I = 2mR^2/5$ es el momento de inercia de la esfera; que la magnitud del momento magnético está dada por $|\mu| = C\omega$ con una constante C y que $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{H}$ es el momento debido a la fuerza magnética de $\boldsymbol{H}$ sobre $\boldsymbol{\mu}$.

Problema 10: Deduzca las ecuaciones de Jefimenko para el campo eléctrico y magnético:

$$E(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\rho(\boldsymbol{x}', t')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') + \frac{\dot{\rho}(\boldsymbol{x}', t')}{c|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') - \frac{\dot{J}(\boldsymbol{x}', t')}{c^2|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) d^3x' \ ,$$

$$B(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{J(\boldsymbol{x}', t')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} + \frac{\dot{J}(\boldsymbol{x}', t')}{c|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2} \right) \wedge (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') d^3x' \ ,$$

donde t' es el tiempo retardado $t' = t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|/c$ y el punto $\dot{}$ denota la derivada temporal de las fuentes.