Electromagnetismo II

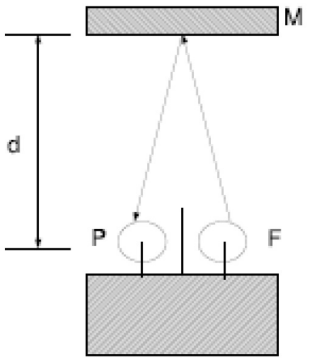
Guía 7
1 de Noviembre de 2017

Tema: Relatividad Especial

Problema 1: Dilatación del tiempo. En la figura se ha dibujado un posible reloj. Consiste en un tubo de destellos (flash) F y una célula fotoeléctrica P apantallados de forma que solamente se ven a través del espejo M, situado a una distancia en reposo d, y montado rígidamente con el conjunto flash-célula fotoeléctrica. Los dispositivos electrónicos del interior de la caja son tales que cuando la célula fotoeléctrica responde a un destello procedente del espejo, se dispara el flash con un retraso despreciable y emite un corto destello hacia el espejo. De este modo, el reloj hace "tic" una vez cada $2d/c$ segundos cuando se encuentra en reposo (se desprecia la distancia de P a F).

a) Suponga que el reloj se mueve con una velocidad uniforme v, *perpendicular* a la línea que va de PF a M, respecto de un observador. Haciendo uso del segundo postulado de relatividad, demuestre por construcción geométrica o algebraica explícita que el observador ve la dilatación relativista del tiempo cuando el reloj se mueve.

b) Suponga que el reloj se mueve con una velocidad v *paralela* a la línea de PF a M. Compruebe que también en este caso se observa que el reloj marcha más lentamente con el mismo factor de dilatación del tiempo.



Problema 2: Demuestre que la ecuación de ondas en 1-dimensión

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

es invariante frente a transformaciones de Lorentz.

Problema 3: *Contracción de Lorentz.* Considere una regla rígida de longitud L en reposo con respecto a un referencial O, colocada de manera que forma un ángulo α con el eje OX de dicho referencial. Un observador O' se mueve con velocidad constante v en la dirección OX^+. ¿Cuál es el ángulo α' con respecto al eje OX y la longitud aparente de la regla respecto de O'? Analice los casos particulares $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi/2$.

Problema 4: Considere un triángulo rectángulo de lados A y B en reposo en un sistema inercial S. Sea S' otro sistema inercial que se mueve con velocidad constante v en la dirección del lado A.

a) Dibuje las líneas mundo de los vértices del triángulo en los dos sistemas inerciales.

b) Calcule la forma del triángulo en el sistema S'

Problema 5: Demuestre explícitamente que dos transformaciones de Lorentz sucesivas en la misma dirección son conmutables y equivalen a una transformación de Lorentz única con una velocidad

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1\, v_2}{c^2}}, \tag{2}$$

en la misma dirección, donde v_1 y v_2 son los parámetros que caracterizan cada una de estas transformaciones.

Problema 6: Un referencial K' se mueve con velocidad v respecto a un referencial K. Un fotón viaja formando un ángulo θ' con la dirección de movimiento. ¿Cuál es el ángulo θ medido en el referencial K?

Problema 7: Un sistema de coordenadas K' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto de otro sistema K. En K', una partícula tiene velocidad $\mathbf{u}'$ y aceleración $\mathbf{a}'$. Partiendo de la ley de adición de velocidades de Einstein

$$\mathbf{u}_\parallel = \frac{\mathbf{u}'_\parallel + \mathbf{v}}{1 + \frac{\mathbf{v}.\mathbf{u}'}{c^2}}, \qquad \mathbf{u}_\perp = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1 + \frac{\mathbf{v}.\mathbf{u}'}{c^2}} \mathbf{u}'_\perp. \tag{3}$$

demuestre que en el sistema K, las componentes de la aceleración paralela y perpendicular a $\mathbf{v}$ son

$$\mathbf{a}_\parallel = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{\mathbf{v}.\mathbf{u}'}{c^2}\right)^3} \mathbf{a}'_\parallel, \qquad \mathbf{a}_\perp = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{\mathbf{v}.\mathbf{u}'}{c^2}\right)^3} \left(\mathbf{a}'_\perp + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge (\mathbf{a}' \wedge \mathbf{u}')\right) \tag{4}$$

Problema 8: Considere el intervalo

$$\Delta s^2 = -c\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \tag{5}$$

a) Demuestre que (4) es invariante frente a transformaciones de Lorentz.

b) Muestre que si dos eventos están separados espacialmente en algún sistema inercial, entonces existe otro sistema inercial en el cual son simultáneos.

c) Muestre que si dos eventos tienen $\Delta s^2 < 0$, entonces existe un sistema inercial en donde éstos ocurren en el mismo lugar.

d) Dibuje en un diagrama espacio-temporal la clasificación de eventos en: *temporales* ($\Delta s^2 < 0$), *espaciales* ($\Delta s^2 > 0$) y *nulos* ($\Delta s^2 = 0$).

Problema 9: Una transformación infinitesimal de Lorentz y su inversa pueden escribirse en la forma

$$x'^\alpha = (\eta^{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta}) x_\beta, \tag{6}$$

$$x^\alpha = (\eta^{\alpha\beta} + \epsilon'^{\alpha\beta}) x'_\beta, \tag{7}$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski y $\epsilon^{\alpha\beta}$ y $\epsilon'^{\alpha\beta}$ son infinitesimales.

a) Demuestre, a partir de la definición de inversa, que $\epsilon'^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\alpha\beta}$.

b) Demuestre, a partir de la conservación de la norma, que $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$.

c) Escribiendo la transformación en función de componentes contravariantes en ambos miembros de la ecuación, demuestre que $\epsilon^{\alpha\beta}$ es equivalente a la matriz $L := -\mathbf{w} \cdot \mathbf{S} - \zeta \cdot \mathbf{K}$, donde $\mathbf{w}$ y ζ son 3-vectores constantes, $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ son los generadores de rotaciones 3-dimensionales, y $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ producen boosts (cambios en la velocidad) puros.

Problema 10: *Paradoja de la escalera y el galpón.* La falta de una noción de simultaneidad absoluta en relatividad especial lleva a muchas paradojas aparentes. Una de las más famosas involucra una escalera y un galpón. Había una vez un granjero que tenía una escalera demasiado larga para guardarla en su galpón. Un día leyó un libro de relatividad y se le ocurrió una idea. Le pidió a su hija que corra con la escalera lo más rápido que pueda, y así, la escalera móvil sufriría una contracción de Lorentz y cuando entrara en el galpón, el granjero cerraría la puerta, capturando la escalera adentro. Sin embargo, la hija había leído un poco más del libro de relatividad, y dijo que en su sistema de referencia, el galpón (y no la escalera) se contraería, y sería aún más difícil guardar la escalera. ¿Quién está en lo cierto? Al final, ¿la escalera entra en el galpón o no?

Problema 11: *Paradoja de los mellizos.* De dos hermanos mellizos, uno viaja al espacio mientras que el otro permanece en la Tierra. Al partir, sincroniza su reloj con el de su hermano. Al regresar, observa que su reloj fue más lento y que él es más joven que su hermano. Sin embargo, podríamos analizar el fenómeno en un sistema de coordenadas en reposo con el hermano que viajó, y entonces parecería que el otro es quien debería ser más jóven que él al regresar. Dibuje las líneas mundo de los dos hermanos y explique por qué no hay contradicción.

Problema 12: Demuestre que los vectores temporales forman un doble cono. Es decir, si v_1 y v_2 son temporales entonces o bien $v_1 + \alpha v_2$ es temporal para todo $\alpha \in [0, \infty)$ o bien $v_1 - \alpha v_2$ es temporal para todo $\alpha \in [0, \infty)$. Concluya entonces que todo vector temporal pertenece a uno de estos dos conos. Uno de ellos se llama cono futuro y el otro cono pasado. Concluya lo mismo para el caso de vectores que no son espaciales (es decir, incluir los vectores nulos en el cálculo anterior).

Problema 13:

- Encuentre dos vectores temporales cuya suma sea espacial.
- Encuetre dos vectores espaciales cuya suma es un vector temporal.
- Demuestre que la suma de dos vectores nulos no es nunca un vector nulo.
- Demuestre que la suma de dos vectores nulos dirigidos al futuro es una vector temporal dirigido al futuro.

Problema 14: Deduzca las fórmulas de aberración y Efecto Doppler para una onda plana.