Electromagnetismo II

Guía 9

22 de Noviembre de 2017

Tema: Tensor de energía momento. Potencial vector. Ondas planas. Radiación
Signatura $(+---)$.

Problema 1: Considere el tensor de energía momento para el campo electromagnético

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\sigma}F^{\nu\rho}\eta_{\sigma\rho} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho}\right). \tag{1}$$

Demuestre que

a) El tensor tiene traza nula: $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$.

b) Si t^μ es un vector temporal, entonces $t^\mu t^\nu T_{\mu\nu}$ da la energía del campo electromagnético medida por un observador con velocidad t^μ. En particular muestre que $t^\mu t^\nu T_{\mu\nu} \geq 0$.

c) Demuestre que el momento definido como $p^\mu = T^{\mu\nu}t_\nu$ es un vector temporal o nulo para cualquier t^μ temporal.

d) Si t^u es un vector temporal dirigido al futuro y l^μ es un vector temporal o nulo dirigido al futuro, demuestre que $T^{\mu\nu}t_\nu l_\mu \geq 0$ (es decir, $p^\mu l_\mu \geq 0$).

e) Demuestre que las componentes espaciales de p^μ están dadas por el vector de Poynting.

f) Escriba explícitamente las componentes de $T^{\mu\nu}$ en términos de E y B.

g) Demuestre que

$$\partial_\mu T^{\mu}{}_{\nu} = j^\sigma F_{\sigma\nu}. \tag{2}$$

Problema 2: Calcule el tensor de energía momento, el momento lineal, el momento angular, el potencial vector y los invariantes del campo electromagnético de una onda plana.

Problema 3: Usando los potenciales de Lienard-Wiechert discuta el promedio temporalde la potencia irradiada por unidad de ángulo sólido en el movimiento relativista de una partícula de carga q que se mueve:

a) oscilando en una recta con posición instantanea $b\cos(\omega t)$;

b) en una órbita circular de radio a con frecuencia angular constante ω

En ambos casos grafique la distribución angular de la radiación y determine la potencia total irradiada.

Problema 4: Considere una carga de magnitud q que oscila en cierta dirección que tomamos como eje z de manera que su posición es $z(t) = a\cos(\omega t)$.

a) Muestre que la potencia irradiada por unidad de ángulo sólido es:

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{q^2 c\beta^4}{4\pi a^2}\,\frac{\sin(\theta)^2\cos(\omega t)^2}{(1+\beta\cos(\theta)\sin(\omega t))^2}\ ,\quad \beta := a\omega/c\ .$$

b) Realizando un promedio temporal muestre que la potencia media irradiada por unidad de ángulo sólido es:

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{q^2 c \beta^4}{32\pi a^2} \, \frac{4 + \beta^2 \cos(\theta)^2}{(1 - \beta^2 \cos(\theta)^2)^{7/2}} \; .$$

c) Diagrame cualitativamente la distribución angular para movimiento relativista y no-relativista.