Electromagnetismo II

Ecuaciones de Jefimenko y partición del campo eléctrico con fuentes de decaimiento "rápido"[1]

Las ecuaciones de Jefimenko

Las ecuaciones de Jefimenko son:

$$E(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3y\ \left(\frac{\rho(\boldsymbol{y},t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\frac{\rho'(\boldsymbol{y},t')}{c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\frac{\boldsymbol{J}'(\boldsymbol{y},t')}{c^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)\ ,$$

$$B(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3y\ \left(\frac{J(\boldsymbol{y},t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}+\frac{J'(\boldsymbol{y},t')}{c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\right)\wedge(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\ ,$$

donde t' es el tiempo retardado $t'=t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c$, y ρ', (resp. $\boldsymbol{J}'$) denota el campo escalar (resp. vectorial) dado por la derivada temporal del campo escalar (resp. vectorial) $(\boldsymbol{x},t)\mapsto\rho(\boldsymbol{x},t)$ (resp. $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)$).

Para obtenerlas, tomamos los potenciales (en el gauge de Lorenz) y calculamos sucesi vamente rot $\boldsymbol{A}$, $\nabla\Phi$ y $\partial\boldsymbol{A}/\partial t$. Para ello –ya que estas aplicaciones de la queridísima regla de la cadena siempre dan dificultades a los alumnos– introducimos el mapa $\xi_{\boldsymbol{y}}$ parametrizado por $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$ que va de $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ en si mismo dado por

$$\xi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},t):=(\boldsymbol{y},\underbrace{t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c}_{=:t_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},t)})\ ;$$

y también el mapa $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}):=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$. Esto nos permite reescribir los potenciales retardados como

$$\Phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int d^3y\frac{(\rho\circ\xi_{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{x},t)}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})|}\ ,\quad \Phi=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int d^3y\frac{(\rho\circ\xi_{\boldsymbol{y}})}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int d^3y\frac{(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{x},t)}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})|}\ .\quad \boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int d^3y\frac{(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|}$$

Observamos que

$$\nabla|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^\alpha=\frac{\alpha\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^{2-\alpha}}\ ;$$

y que, para el tiempo retardado $t_{\boldsymbol{y}}$

$$\nabla t_{\boldsymbol{y}}=-c^{-1}\nabla|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|=-\frac{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|}\ ,\quad \partial t_{\boldsymbol{y}}/\partial t=1\ .$$

Recordando que $\mathrm{rot}\,(f\boldsymbol{F})=f(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F})-\boldsymbol{F}\wedge(\nabla(f))$,

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int d^3y\ \left\{\left(\nabla|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^{-1}\right)\wedge[(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})]+|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^{-1}[\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})]\right\}\ ;$$

ahora

$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})=\epsilon_{jk\ell}\ \hat{\boldsymbol{e}}_\ell\left(\frac{\partial(\boldsymbol{J}\circ\xi_y)_k}{\partial x_j}\right)=\epsilon_{jk\ell}\ \hat{\boldsymbol{e}}_\ell\left[\left(\frac{\partial J_k}{\partial t}\right)\circ\xi_{\boldsymbol{y}}\right]\left(\frac{\partial t_{\boldsymbol{y}}}{\partial x_j}\right)=(\nabla t_{\boldsymbol{y}})\wedge\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right)\circ\xi_{\boldsymbol{y}}\right]\ .$$

[1] G.A. Raggio, octubre 2017.

Luego

$$\text{rot}\,(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|}\,[\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}\wedge(\boldsymbol{J}'\circ\xi_{\boldsymbol{y}})]\ ,$$

donde $\boldsymbol{J}' := \partial\boldsymbol{J}/\partial t$ denota el campo vectorial definido por la derivada parcial temporal del campo $\boldsymbol{J}$. Con esto, obtenemos la relación de Jefimenko para el campo magnético

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int d^3y\left(\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}+\frac{\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right)(\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c)}{c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\right)\wedge(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\ .$$

Calculamos ahora las contribuciones al campo eléctrico.

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi}\int d^3y\frac{(\boldsymbol{J}'\circ\xi_{\boldsymbol{y}})}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|}\ .$$

Recordando que $\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$,

$$(\nabla\Phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int d^3y\left(\frac{[\nabla(\rho\circ\xi_{\boldsymbol{y}})]}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|}+\ (\nabla|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^{-1})(\rho\circ\xi_{\boldsymbol{y}})\right)\ ;$$

pero

$$\nabla(\rho\circ\xi_{\boldsymbol{y}}) = \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\circ\xi_{\boldsymbol{y}}\right]\ (\nabla t_{\boldsymbol{y}}) = -\frac{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|}\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\circ\xi_{\boldsymbol{y}}\right]\ ,$$

con lo cual

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int d^3y\ \left(\frac{\rho(\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\frac{\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right)(\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c)}{c|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right.$$

$$\left.-\ \frac{\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right)(\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c)}{c^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)\ .$$

Podemos por supuesto reescribir las relaciones de Jefimenko como:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int d^3y\ \left(\frac{\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{y}|/c)}{|\boldsymbol{y}|^3}\boldsymbol{y}+\frac{\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{y}|/c)}{c|\boldsymbol{y}|^2}\boldsymbol{y}\right.$$

$$\left.-\ \frac{\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{y}|/c)}{c^2|\boldsymbol{y}|}\right)\ ;$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int d^3y\left(\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{y}|/c)}{|\boldsymbol{y}|^3}+\frac{\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{y}|/c)}{c|\boldsymbol{y}|^2}\right)\wedge\ \boldsymbol{y}\ .$$

Otra partición de $\boldsymbol{E}$.

Observamos que en $\boldsymbol{E}$ hay un sumando que contiene a $\partial\rho/\partial t$ que es igual a $-\nabla\cdot\boldsymbol{J}$. Nos proponemos usar esto para expresar a $\boldsymbol{E}$ en términos de ρ, $\boldsymbol{J}$ y $\boldsymbol{J}'$.
Para $\alpha=1,2,3$, considero el campo vectorial

$$(\boldsymbol{y},t)\mapsto \boldsymbol{g}_\alpha(\boldsymbol{y},t):=\frac{x_\alpha-y_\alpha}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\,(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{x},t)\ ,$$

parametrizado por $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ fijo (lo que no se explicita en la notación). Calculamos la divergencia de este campo vectorial.

$$\operatorname{div}_y(\boldsymbol{g}_\alpha)=\frac{x_\alpha-y_\alpha}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\operatorname{div}_y(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})+\left(\nabla_y\,\frac{x_\alpha-y_\alpha}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\right)\cdot(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})\ .$$

Ahora,

$$\frac{\partial}{y_\beta}(J_\beta\circ\xi_{\boldsymbol{y}})=\left[\left(\frac{\partial J_\beta}{\partial y_\beta}\right)\circ\xi_{\boldsymbol{y}}\right]+\left[\left(\frac{\partial J_\beta}{\partial t}\right)\circ\xi_{\boldsymbol{y}}\right]\left(\frac{\partial t_{\boldsymbol{y}}}{\partial y_\beta}\right)=\left[\left(\frac{\partial J_\beta}{\partial y_\beta}\right)\circ\xi_{\boldsymbol{y}}\right]+\left[\left(\frac{\partial J_\beta}{\partial t}\right)\circ\xi_{\boldsymbol{y}}\right]\left(\frac{x_\beta-y_\beta}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|}\right)\ ,$$

o sea:

$$\operatorname{div}_y(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})\ =(\operatorname{div}\boldsymbol{J})\circ\xi_{\boldsymbol{y}}+\frac{[\boldsymbol{J}'\circ\xi_{\boldsymbol{y}}]\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|}\ .$$

También,

$$\frac{\partial|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-2}(x_\alpha-y_\alpha)}{\partial y_\beta}=\frac{2(x_\alpha-y_\alpha)(x_\beta-y_\beta)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^4}\ -\ \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\ ,$$

de modo que:

$$\nabla_y\,\frac{x_\alpha-y_\alpha}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}=-|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^{-2}\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha+2(x_\alpha-y_\alpha)\,\frac{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^4}\ .$$

Con esto,

$$\operatorname{div}_y(\boldsymbol{g}_\alpha)=(x_\alpha-y_\alpha)\left[\frac{(\nabla\cdot\boldsymbol{J})\circ\xi_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^2}+\frac{(\boldsymbol{J}'\circ\xi_{\boldsymbol{y}})\cdot\ \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^3}+2\,\frac{(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})\cdot\ \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^4}\right]-\frac{(J_\alpha\circ\xi_{\boldsymbol{y}})}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^2}\ .$$

Ahora, si B_R es la bola de radio R centrada en $\mathbf{0}$, tenemos

$$\int_{B_R}d^3y\ \operatorname{div}_y\boldsymbol{g}_\alpha=R^2\int_{S_R}\boldsymbol{g}_\alpha\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\Omega\,d\Omega\ ,$$

donde S_R es la esfera de radio R en $\mathbb{R}^3$, $\hat{\Omega}$ es el vector radial unitario en la dirección Ω y $d\Omega$ es el elemento de superificie de la esfera S_1. Supongamos que

$$\text{(1)}\qquad \lim_{R\to\infty}R^2\int_{S_R}\boldsymbol{g}_\alpha\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\Omega\,d\Omega\ =\ 0\ ;$$

con esto obtenemos la fórmula de substitución:

$$\int d^3y\frac{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\circ\xi_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^2}(x_\alpha-y_\alpha)=\int d^3y\frac{(-\nabla\cdot\boldsymbol{J})\circ\xi_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^2}(x_\alpha-y_\alpha)$$

$$=\int d^3y\ \left\{(x_\alpha-y_\alpha)\left[\frac{(\boldsymbol{J}'\circ\xi_{\boldsymbol{y}})\cdot(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}})}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^3}+2\frac{(\boldsymbol{J}\circ\xi_{\boldsymbol{y}})\cdot(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}})}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^4}\right]-\frac{(J_\alpha\circ\xi_{\boldsymbol{y}})}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^2}\right\}\ .$$

Esta es la componente α de

$$\int d^3y \frac{\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t}\right) \circ \xi_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^2}\ \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}} = \int d^3y \frac{(-\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \circ \xi_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^2}\ \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}$$

$$= \int d^3y\ \left\{ \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}\ \left[\frac{(\boldsymbol{J}' \circ \xi_{\boldsymbol{y}}) \cdot \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{c^2|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^3} + 2\frac{(\boldsymbol{J} \circ \xi_{\boldsymbol{y}}) \cdot \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^4} \right] - \frac{(\boldsymbol{J} \circ \xi_{\boldsymbol{y}})}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^2} \right\}\ ,$$

que nos permite escribir –siempre suponiendo (1)–

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3y\ \left(\frac{\rho \circ \xi_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^3}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}\ - \frac{\boldsymbol{J}' \circ \xi_{\boldsymbol{y}}}{c^2|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|} + \frac{\rho' \circ \xi_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^2}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3y\ \left(\frac{\rho \circ \xi_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^3}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}\ - \frac{\boldsymbol{J}' \circ \xi_{\boldsymbol{y}}}{c^2|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|}\ + \frac{(\boldsymbol{J}' \circ \xi_{\boldsymbol{y}}) \cdot \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{c^2|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^3}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}} + 2\frac{(\boldsymbol{J} \circ \xi_{\boldsymbol{y}}) \cdot \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^4}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}} - \frac{(\boldsymbol{J} \circ \xi_{\boldsymbol{y}})}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^2} \right)\ .$$

Usamos la fórmula vectorial

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}]\boldsymbol{b}\ ,$$

para procesar los dos sumandos que tienen $\boldsymbol{J} \circ \xi_{\boldsymbol{y}}$ y $\boldsymbol{J}' \circ \xi_{\boldsymbol{y}}$ para finalmente obtener

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3y\ \left(\frac{\rho \circ \xi_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^3}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}\ + \frac{(\boldsymbol{J} \circ \xi_{\boldsymbol{y}}) \cdot \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^4}\ \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}} + \frac{[(\boldsymbol{J} \circ \xi_{\boldsymbol{y}}) \wedge \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}] \wedge \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{c|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^4}\ + \frac{[(\boldsymbol{J}' \circ \xi_{\boldsymbol{y}}) \wedge \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}] \wedge \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}}{c^2|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}|^3} \right)}\ .$$

Regresamos a (1). Estimamos

$$\mid \int_{S_R} \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\Omega\, d\Omega \mid \leq \int_{S_R} \mid \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\Omega \mid\ d\Omega \leq \int_{S_R} \mid \boldsymbol{g}_\alpha \mid\ d\Omega\ ,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\mid \boldsymbol{g}_\alpha \mid = \mid \frac{(x_\alpha - y_\alpha)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}, t- \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid /c)}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid^2} \mid = \frac{\mid x_\alpha - y_\alpha \mid}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid^2}\ \mid \boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}, t- \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid /c) \mid\ .$$

Pero $\mid x_\alpha - y_\alpha \mid \leq \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid$ y

$$\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid^2 = \mid \boldsymbol{x} \mid^2 + \mid \boldsymbol{y} \mid^2 - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \geq \mid \boldsymbol{x} \mid^2 + \mid \boldsymbol{y} \mid^2 - 2 \mid \boldsymbol{x} \mid \mid \boldsymbol{y} \mid = (\mid \boldsymbol{x} \mid - \mid \boldsymbol{y} \mid)^2$$

de modo que si $\mid \boldsymbol{x} \mid \neq \mid \boldsymbol{y} \mid$

$$\frac{\mid x_\alpha - y_\alpha \mid}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid^2} \leq \frac{1}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid} \leq \frac{1}{\mid\mid \boldsymbol{x} \mid - \mid \boldsymbol{y} \mid\mid}\ .$$

Para $\mid \boldsymbol{y} \mid > 2 \mid \boldsymbol{x} \mid$ trivialmente $\mid\mid \boldsymbol{x} \mid - \mid \boldsymbol{y} \mid\mid > \mid \boldsymbol{y} \mid /2$. Aplicando esto cuando $\boldsymbol{y} \in S_R$ y $\mid \boldsymbol{x} \mid < R/2$, obtenemos

$$\mid R^2 \int_{S_R} \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\Omega\, d\Omega \mid \leq 2R \int_{S_R} \mid \boldsymbol{J}(R\,\hat{\boldsymbol{e}}_\Omega, t- \mid \boldsymbol{x} - R\,\hat{\boldsymbol{e}}_\Omega \mid /c) \mid\ d\Omega\ .$$

Para obtener (1) hay que controlar simultaneamente el comportamiento de $\boldsymbol{J}$ a grandes distancias y en el pasado remoto[2]. Si, por ejemplo, $\mid \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) \mid \leq f(\boldsymbol{x})$ para todo t (o para todo $t \leq t_o$ con algún t_o) y además $\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty}\ \mid \boldsymbol{x} \mid\ f(\boldsymbol{x}) = 0$ entonces se obtiene (1).

[2]Por ejemplo: para todo vector unitario $\hat{\boldsymbol{e}}$ y para todo $\epsilon > 0$ hay $\rho > 0$ y $t_o \in \mathbb{R}$ tales que si $\mid \boldsymbol{x} \mid \geq \rho$ y $t \leq t_o$ se tiene $\mid \boldsymbol{x} \mid \mid \boldsymbol{J}(\mid \boldsymbol{x} \mid\ \hat{\boldsymbol{e}}, t) \mid < \epsilon$.