Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 1 (2016)

Problema 1: Escribir los siguientes números complejos en la forma $x + iy$ y dibujarlos.

a) $(2-3i)(2+3i)$ *b)* $\dfrac{(3+i)}{3-4i} - \dfrac{(2-i)}{8i}$ *c)* $(1-i)^4$

Problema 2: En cada caso determinar $\overline{z}$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ y $|z|$.

a) $z = 4i - 3$

b) $z = -2i$

c) $z = (4i)^2$

d) $z = \dfrac{-1+3i}{2-i}$

Problema 3: En cada caso hallar $\arg(z)$ y $\mathrm{Arg}(z)$

a) $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$,

b) $z = (\sqrt{3}-i)^6$.

Problema 4: Probar que

a) $\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

b) $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|$

c) Si $|z_2| \neq |z_3|$ entonces $\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2|-|z_3||}$

Problema 5: Graficar en el plano los conjuntos definidos continuación. Determine en cada caso la frontera y el interior del conjunto.

a) $|z| = 1$

b) $\mathrm{Im}\,(z) = 0$

c) $|3z+2| < 1$

d) $0 < \mathrm{Arg} z \leq \pi$

e) $\{\mathrm{Im}\,(z) \geq 2\} \cup \{\mathrm{Re}\,(z^2) > 0\}$

f) $\mathrm{Im}\,(z + 1/z) = 0$

Problema 6: Usar la forma polar para simplificar las siguientes expresiones. Hallar en cada caso el módulo y el argumento principal del resultado.

a) $i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)$

b) $\dfrac{3}{(\sqrt{3}-i)^2}$

c) $(1+i)^3$

d) $i^5 \cdot i^3$

Problema 7:

a) Probar la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \qquad z \neq 1.$$

Ayuda: Tomar $s = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ y calcular $(1-z)s$.

b) Mostrar que si c es una raíz n-ésima de la unidad, $c \neq 1$, entonces

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0$$

Problema 8: Hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones y dibujarlas.

a) $z^5 - 32 = 0$

b) $z^2 - 2i = 0$

c) $z^3 + 1 = 0$

Problema 9: Hallar las raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$ y usarlas para factorizar $z^4 + 4$ en producto de polinomios de grado dos con coeficientes reales.