Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 3 (2016)

Problema 1: Sea f una función analítica en un dominio D abierto y conexo. Probar que:

a) Si $f'(z) = 0$, para todo $z \in D$ entonces f es constante.

b) Si $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.

c) Si $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.

Problema 2: Probar que las siguientes funciones $u(x, y)$ son armónicas y hallar una conjugada armónica $v(x, y)$:

a) $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$ *b)* $u(x, y) = \cosh x \cos y$

Problema 3: Probar que las curvas de nivel de una función armónica y las curvas de nivel de su conjugada armónica son perpendiculares en todo punto donde sus gradientes no se anulan. Grafique cualiltativamente las curvas de nivel de las partes reales e imaginaria de $f(z) = z^2$.

Problema 4: Encontrar el radio de convergencia de las series:

$$1 \pm \frac{1}{2}z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^2 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 + \dots$$

cuyos coeficientes son en el caso de la serie de signo no alternante:

$$a_0 = 1 \ \wedge \ a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \text{ si } n \geq 1\,,$$

o bien en el caso de la serie alternante:

$$a_0 = 1 \ \wedge \ a_n = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \ \text{ si } n \geq 1\ .$$

Relacione a estas series con alguna raíz cuadrada de $1/(1 \pm z)$.
Sugerencia y ayuda: Muestre que en ambos casos $|a_n| = (2n-1)!/[2^{2n-1} n!(n-1)!]\,,\ n \geq 1$ y use el sandwich de Stirling-Robbins:

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} e^{1/12n}\ .$$

O, más simplemente, use el criterio del cociente.

Problema 5: Muestre que $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$, y $|\exp(z^2)| \leq \exp(|z|^2)$.

Problema 6: Se definen las funciones trigonométricas de variable compleja como sigue:

$$\mathrm{sen}(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \qquad \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Pruebe que

a) $\mathrm{sen}(-z) = -\,\mathrm{sen}(z)$, y $\cos(-z) = \cos(z)$.

b) $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

c) $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen}(z_1)\cos(z_2) + \operatorname{sen}(z_2)\cos(z_1)$.

d) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \operatorname{sen}(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$.

e) Tanto $\operatorname{sen}(z)$ como $\cos(z)$ son periódicas con período real 2π.

Problema 7: Encuentre todas las raíces de $\cos(z)$.

Problema 8: Se definen las funciones hiperbólicas de variable compleja como sigue:

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \qquad \cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}.$$

Pruebe que:

a) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh}(z)$ y $\cosh(-z) = \cosh(z)$.

b) $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$.

c) $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh}(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\operatorname{senh}(z_2)$.

d) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \operatorname{senh}(z_1)\operatorname{senh}(z_2)$.

e) $\operatorname{senh}(z) = \operatorname{senh}(x)\cos(y) + i\cosh(x)\operatorname{sen}(y)$.

f) $\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y)$.

g) $|\operatorname{senh}(z)|^2 = \operatorname{senh}^2(x) + \operatorname{sen}^2(y)$.

h) $|\cosh(z)|^2 = \operatorname{senh}^2(x) + \cos^2(y)$.

Problema 9: Lleve las siguientes expresiones a la forma a + ib o resuelva la ecuación planteada según corresponda. En cada caso considere todos los valores posibles.

a) $(i^i)^i$ *b)* $\big(\operatorname{Log}(i)\big)^{(i\pi)}$ *c)* $\dfrac{\exp(iz)}{5} = \operatorname{senh}(iz)$.

Problema 10: Muestre que

a) $\log(i^{1/2})$ y $(1/2)\log(i)$ representan el mismo conjunto de valores.

b) $\log(i^2)$ y $2\log(i)$ NO representan el mismo conjunto de valores.

Problema 11: Muestre que para todos los puntos del semiplano complejo derecho ($z = x + iy$, $x > 0$) vale

$$\operatorname{Log}(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Problema 12: Se define la inversa del $\operatorname{sen}(z)$ como todos los valores $w \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen}(w) = z$. Muestre que

$$\operatorname{arc\,sen}(z) = -i\log\Big(iz + (1 - z^2)^{1/2}\Big).$$

Problema 13: Sea γ un camino con punto inicial z_1 y punto final z_2 entonces $\int_\gamma f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(z)dz$ donde $-\gamma$ es el camino γ recorrido inversamente.

Problema 14: Sean γ la línea recta que une los puntos 1 e i y σ la curva formada por los siguientes trazos: la línea recta que une los puntos 1 y $1+i$ y la línea recta que une los puntos $1+i$ e i. Expresar γ y σ como caminos y calcular $\int_\gamma f(z)dz$ y $\int_\sigma f(z)dz$, donde $f(z) = |z|^2$. ¿Se cumple aquí la independencia del camino?

Problema 15: Encontrar $\int_\gamma z^{-\frac{1}{2}}dz$ donde

a) γ es la mitad superior del círculo unidad desde 1 hasta -1.

b) γ es la mitad inferior del círculo unidad desde 1 hasta -1.

Compare y discuta los resultados.

Problema 16: Considere:

a) el camino Γ del plano complejo determinado por $w(t) = t^3 + it^6$ para $-1 \leq t \leq 1$. Encuentre una parametrizacion suave de Γ.

b) los puntos Σ del plano complejo determinados por $w(t) = t^2 + it^3$ para $-1 \leq t \leq 1$. Encuentre dos caminos suaves Σ_1 y Σ_2 tales que $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$.

Problema 17: Calcule la integral

$$\int_\gamma \overline{z}^2 \, dz$$

donde γ es el camino cerrado determinado por el perímetro del triángulo de vértices $z_1 = 0$, $z_2 = 2$ y $z_3 = 2 + 2i$ recorrido en el sentido $z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1$.

Problema 18: Encuentre una cota superior para el módulo de la integral

$$\int_C \frac{\exp(z)}{z^2 + i} \, dz$$

donde C es el círculo de radio 2 y centro 0 recorrido en sentido horario una vez.

Problema 19: Muestre que si f es analítica en el disco abierto $D(0,1)$ con $|f'(z)| \leq M$ ($z \in D(0,1)$) entonces $|f(z_2) - f(z_1)| \leq M|z_2 - z_1|$ para $z_2, z_1 \in D(0,1)$.

Problema 20: Dado $z_o \in \mathbb{C}$ y un circulo C orientado positivamente que encierre a z_o, considere la semirecta horizontal $\{z : \operatorname{Arg}(z - z_o) = \pi\}$. Sea z_1 el (único) punto de C con $\operatorname{Arg}(z_1 - z_o) = \pi$ y, refiriendose a la figura, considere puntos α y β de C distintos de z_1 con $\operatorname{Arg}(\alpha) > 0$ y $\operatorname{Arg}(\beta) < 0$. Calcule

$$\int_{C_{\beta \to \alpha}} \frac{dz}{z - z_o}$$

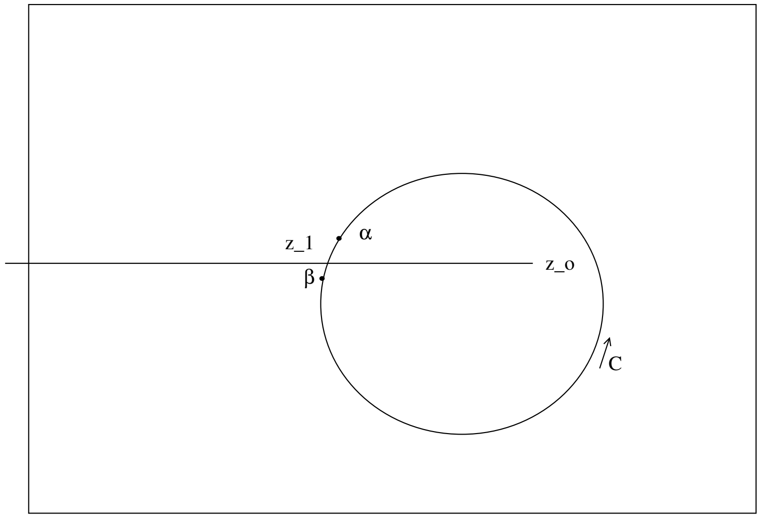
y haciendo los límites $\alpha \to z_1$ y $\beta \to z_1$ determine $\int_C dz/(z - z_o)$.

Problema 21: Determine $\int_\gamma (1/z) \; dz$ donde γ es un camino que une a $z_1 = -3i$ con $z_2 = 1 + 3$ para los siguientes casos:

a) el camino no corta la semirrecta $\{z = t\exp(i\alpha) : t \geq 0\}$ donde α es un real fijo.

b) el camino transcurre en el semi-plano de complejos con parte real positiva, es decir $[\gamma] \subset \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\} \cup \{z_1\}$.

c) el camino transcurre fuera del cono $\{z : -\pi/2 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/4\} \cup \{0\}$.



Combinando estos resultados determine el valor de $\int_\Gamma (1/z)dz$ para un camino cerrado simple que pasa por z_1 y por z_2 (y no por $z = 0$). Comparar el resultado con el problema anterior.