Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 5 (2016) – Algunas soluciones[1]

Problema 5: Determine las posibles series de Laurent para

$$f(z) = \frac{z^2 \cos(i/3z)}{z - \exp(i\pi/4)} \ , \ \ z \neq 0 \ ,$$

centradas en $z = 0$ y sus respectivos anillos de convergencia.
¿Qué tipo de singularidad hay en $z = 0$? ¿Cuál es el residuo de f en $z = 0$? ¿Cuál es el residuo de f en $z = \exp(i\pi/4)$?

Solución: Antes de empezar, $\cos(iz) = (\exp(i^2 z) + \exp(-i^2 z))/2 = \cosh(z)$, de modo que con $z_1 = \exp(i\pi/4)$ (recuerde que $|z_1| = 1$ y que $1/z_1 = \overline{z_1}$)

$$f(z) = (z - z_1)^{-1} z^2 \cosh(1/3z) \ .$$

Las singularidades son 0 y z_1 ambas aisladas.

La función

$$\phi(z) := z^2 \cosh(1/3z) \ , \ \ z \neq 0$$

es analítica y su desarrollo de Laurent es simplemente (use la serie exponencial)

$$\phi(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k)! 9^k} \ z^{2(1-k)} \ , \tag{1}$$

que es convergente en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ donde está definida ϕ. Por lo tanto 0 es una singularidad esencial de ϕ y es inmediato[2] que es una singularidad esencial de f ya que $z \mapsto (z - z_1)^{-1}$ es analítica en un entorno de $z = 0$ (¡no muy grande! de radio menor a 1). Ya que ϕ es analítica en un entorno de z_1 y z_1 es un cero simple de $z \mapsto z - z_1$, la singularidad z_1 de f es un polo simple.

Podemos contestar algunas preguntas sin mayores indagaciones. Hay cuatro series de Laurent; dos centradas en 0 y dos centradas en z_1. Las primeras dos corresponden al (anillo) disco pinchado $D_o(0,1)$ y al anillo $A(0; 1, \infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$. Aquellas de centro z_1 corresponden al disco pinchado $D_o(z_1, 1)$ y al anillo $A(z_1; 1, \infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{D(z_1, 1)}$.

La serie de Laurent de centro z_1 que converge para z con $0 < |z - z_1| < 1$ tiene parte principal $a_{-1}/(z - z_1)$ donde

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \to z_1} \phi(z) = \phi(z_1) = z_1^2 \cosh(1/3z_1) = i \cosh(\overline{z_1}/3) \ ,$$

siendo este número el residuo de f en z_1.

---

[1] G.A. Raggio

[2] Lema: si g tiene una singularidad aislada esencial en z_o y h es analítica en un entorno de z_o entonces gh tiene una singularidad aislada en z_o.
Demostración: $z \mapsto |g(z)|$ no es ni acotada en un entorno de z_o ni converge a ∞ para $z \to z_o$. Entonces $z \mapsto |h(z)g(z)|$ tiene las mismas propiedades ya que $\lim_{z \to z_o} h(z) = h(z_o)$.

Como $z=0$ es singularidad esencial y no un polo el cálculo del residuo no es elemental. Habrá que determinarlo vía la serie de Laurent.

La serie de Laurent en el anillo $\{z:\ 0<|z|<1|\}$:

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\ ,\ \ 0\ <\ |z|\ <\ 1\ .$$

Idea: "use las series que conoce y multiplique". Ya tenemos, en (1), la serie de Laurent de ϕ válida para $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Por otro lado, con la suma de la serie geométrica,

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{-1}{z_1}\,\frac{1}{1-z/z_1}=\frac{-1}{z_1}\sum_{k\in\mathbb{N}}(z/z_1)^k=-\sum_{k\in\mathbb{N}} z_1^{-k-1}z^k\ ,\ \ |z/z_1|<1\ .$$

Como $|z/z_1|=|z|/|z_1|=|z|$ esta serie (de Taylor) converge en $D(0,1)$. En el miembro derecho de

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n=-\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} z_1^{-k-1}z^k\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n)!9^n}\ z^{2(1-n)}\right)\ ,$$

podemos multiplicar término a término y coleccionar los coeficientes asociados con cada una de las potencias de z para obtener:

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} z_1^{-k-1}z^k\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n)!9^n}\ z^{2(1-n)}\right)=\sum_{k,n\in\mathbb{N}} z_1^{-k-1}\frac{1}{(2n)!9^n}\ z^{2(1-n)+k}$$

$$=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\ \sum_{\{n\in\mathbb{N}:\,2n\geq 2-j\}} z_1^{1-j-2n}\frac{1}{(2n)!9^n}\ z^j\ .$$

Para obtener la última igualdad hemos introducido el índice $j=2(1-n)+k$ que, cuando n y k varian independientemente en $\mathbb{N}$, varia en $\mathbb{Z}$; esto nos elimina el índice $k=j+2(n-1)$ e impone –ya que $k\geq 0$– que $j+2(n-1)\geq 0$ o, equivalentemente, $2n\geq 2-j$. Entonces

$$a_j=-\sum_{\{n\in\mathbb{N}:\,2n\geq 2-j\}}\frac{1}{(2n)!3^{2n}z_1^{2n+j-1}}=-z_1^{1-j}\sum_{\{n\in\mathbb{N}:\,2n\geq 2-j\}}\frac{1}{(2n)!(3z_1)^{2n}}\ .$$

La serie se puede sumar fácilmente si uno le resta lo que corresponda a la serie de $\cosh(1/3z_1)$. Asi, entonces

$$a_n=-z_1^{1-n}\cosh(\overline{z_1}/3)\ ,\ \ n\geq 2\ ,$$

$$a_n=-z_1^{1-n}\left(\cosh(\overline{z_1}/3)-1\right)\ ,\ \ n=0,1\ ,$$

$$a_n=-z_1^{1-n}\left(\cosh(\overline{z_1}/3)-1-\frac{(\overline{z_1}/3)^2}{2!}\right)\ ,\ \ n=-1,-2\ ;$$

etc. En particular, el residuo pedido es

$$a_{-1}=-z_1^2\left(\cosh(\overline{z_1}/3)-1-\frac{(\overline{z_1}/3)^2}{2!}\right)$$

que con $z_1^2=i$ se determina a

$$a_{-1}=\left(-i\cosh(\overline{z_1}/3)+i+1/9\right)\ .$$

La serie de Laurent en el anillo $\{z:\ |z|>1\}$:

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n\ ,\ \ |z|\ >\ 1\ .$$

La idea es la misma que antes. La serie de Laurent de ϕ dada por (1) es válida para $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ergo tambien en el anillo $A(0;1,\infty)$. Por otro lado, con la suma de la serie geométrica,

$$\frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-z_1/z} = \frac{1}{z}\sum_{k\in\mathbb{N}}(z_1/z)^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} z_1^k z^{-k-1}\ ,\ \ |z_1/z|<1\ .$$

Como $|z/z_1| = |z|/|z_1| = |z|$ esta serie (de Laurent) converge fuera de $\overline{D(0,1)}$ o sea en nuestro anillo. Ahora

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} z_1^k z^{-k-1}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n)!9^n}\ z^{2(1-n)}\right) = \sum_{k,n\in\mathbb{N}} z_1^k \frac{1}{(2n)!9^n}\ z^{2(1-n)-k-1}$$

$$= \sum_{\{j\in\mathbb{Z}:\, j\le 1\}}\ \sum_{\{n\in\mathbb{N}:\, 2n\le 1-j\}} z_1^{1-j-2n}\frac{1}{(2n)!9^n}\ z^j$$

de modo que $b_n = 0$ para $n\ge 2$ y

$$b_n = z_1^{1-n}\sum_{\{k\in\mathbb{N}:\, 2k\le 1-n\}} \frac{1}{(2k)!(3z_1)^{2k}}\ ,\ \ n\le 1\ .$$

Asi, entonces

$$b_1 = 1\ ,\ \ b_0 = z_1\ ,\ \ b_{-1} = z_1^2\left(1+\frac{1}{2!9z_1^2}\right)\ ,\ \ ;$$

etc.

Variante: Se tiene

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\ ,\ \ n\in\mathbb{Z}\ ,$$

donde Γ es un camino cerrado simple orientado positivamente[3] con $[\Gamma]\subset A(0;1,\infty)$. El camino encierra ambas singularidades. Sean C_1 el círculo de radio $1/2$ centrado en 0 y orientado positivamente y respectivamente C_2 el círculo de radio $1/2$ centrado en z_1 y orientado positivamente. Uniendo Γ a C_1 y a C_2 por sendos segmentos rectos contenidos en nuestro anillo, se ve que

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\ .$$

El primer término es el coeficiente ya calculado a_n para $n\in\mathbb{Z}$. En el segundo sumando, el camino C_2 encierra solamente el polo simple z_1 de f. Reescribiendo el integrando

$$f(z)z^{-n-1} = \frac{\cosh(1/3z)z^{1-n}}{(z-z_1)} = \frac{\psi_n(z)}{z-z_1}$$

donde $\psi_n(z) := \cosh(1/3z)z^{1-n}$ –que es analítica en todo el disco abierto $D(z_1,1/2)$– tenemos, con la fórmula de Cauchy, que

$$\int_{C_2}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \int_{C_2}\frac{\psi_n(z)}{z-z_1}\,dz = (2\pi i)\psi_n(z_1) = (2\pi i)z_1^{1-n}\cosh(\overline{z_1}/3)\ ,\ \ n\in\mathbb{Z}\ .$$

Por lo tanto:

$$b_n = a_n + z_1^{1-n}\cosh(\overline{z_1}/3)\ ,\ \ n\in\mathbb{Z}\ . \tag{2}$$

Con nuestras fórmulas anteriores para los coeficientes a_n obtenemos inmediatamente $b_n = 0$ para $n\ge 2$ y las expresiones ya obtenidas para b_1, b_o, $\cdots$.
Inversamente: si hemos calculado los b_n que son simples sumas finitas (mande el trabajo a una computadora) entonces la fórmula (2) nos entrega los a_n.

[3] Por ejemplo un círculo centrado en 0 de radio 17.

Algo más: las series de Laurent de centro z_1

La serie de Laurent en el anillo $\{z:\ 0<|z-z_1|<1\}$:

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_1)^n\ ,\ \ 0\ <\ |z-z_1|\ <\ 1\ .$$

Por lo que dijimos al principio, $c_n=0$ para $n\leq -2$. La función ϕ es analítica en $D(z_1,1)$ y allí,

$$\phi(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\phi^{(n)}(z_1)}{n!}\,(z-z_1)^n\ ;$$

pero entonces

$$c_n=\frac{\phi^{(n+1)}(z_1)}{(n+1)!}\ ,\ \ n\geq -1\ .$$

La serie de Laurent en el anillo $\{z:\ 1<|z-z_1|\}$:

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(z-z_1)^n\ ,\ \ 1\ <\ |z-z_1|\ .$$

Seguimos uno de los posibles caminos donde podemos utilizar algo de lo ya hecho. Como en la *"Variante"* tenemos

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\phi(z)}{(z-z_1)^{n+2}}\,dz\ ,\ \ n\in\mathbb{Z}\ .$$

Con los círculos C_1 y C_2 ya usados

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\phi(z)}{(z-z_1)^{n+2}}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\phi(z)}{(z-z_1)^{n+2}}\,dz\ .$$

La integral sobre C_2 nos da los ya calculados c_n:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\phi(z)}{(z-z_1)^{n+2}}\,dz=c_n\ ,\ \ n\in\mathbb{Z}\ .$$

Para la integral sobre C_1 obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\phi(z)}{(z-z_1)^{n+2}}\,dz=Res\left(\frac{\phi(z)}{(z-z_1)^{n+2}};0\right)$$

ya que C_1 encierra solamente la singularidad (esencial) $z=0$ de ϕ. El residuo buscado es el coeficiente p_{-1} de la serie de Laurent de $z\mapsto\phi(z)/(z-z_1)^{n+2}$ alrededor de $z=0$. Ahora, con $\psi_n(z):=1/(z-z_1)^{n+2}$, $n\in\mathbb{Z}$, tenemos una función analítica en $D(0,1)$ de modo que

$$\psi_n(z)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\psi_n^{(k)}(0)}{k!}\,z^k\ ,\ \ |z|<1\ .$$

La serie de Laurent buscada se obtiene multiplicando esta serie de Taylor con la serie de Laurent (1)

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\psi_n^{(k)}(0)}{k!}\,z^k\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2m)!9^m}\ z^{2(1-m)}\right)=\sum_{k,m\in\mathbb{N}}\frac{\psi_n^{(k)}(0)}{k!(2m)!3^{2m}}z^{k+2(1-m)}\ .$$

Nos interesa solamente el coeficiente de la potencia z^{-1} que es[4]

$$p_{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\psi_n^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!(2j+4)!3^{2j+4}} \ .$$

En definitiva

$$d_n = c_n + \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\psi_n^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!(2j+4)!3^{2j+4}} \ .$$

Se calcula rápidamente que

$$\psi_n^{(k)}(0) = (-1)^n \frac{(k+n+1)!}{z_1^{k+n+2}} \quad , \quad \text{si } n \geq -1 \ .$$

Mientras que para $n \leq -2$, $\psi_n = (z - z_1)^{|n|-2}$ y la serie que expresa a p_{-1} para estos n es finita.

[4]ponemos $k + 2(1-m) = -1$ o sea $k = 2m - 3$ de donde se desprende que k es impar y mayor que 1. Luego $k = 2j + 1$ con $j \in \mathbb{N}$ y $2m = k + 3 = 2j + 4$. Por lo tanto

$$\sum_{\{k,m \in \mathbb{N}:\, k+2(1-m)=-1\}} \frac{\psi_n^{(k)}(0)}{k!(2m)!3^{2m}} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\psi_n^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!(2j+4)!3^{2j+4}} \ .$$