Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 5 (2016)

**Problema 1:** Calcule las series de Taylor en los centros $z_0$ indicados y determine los radios de convergencia

*a)* $f(z) = 1/z,\ z_0 = 1 + i.$

*b)* $f(z) = z^i$, (rama principal), $z_0 = 1.$

*c)* $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+2)},\ z_0 = 2.$

**Problema 2:** Encontrar las singularidades de cada una de las siguientes funciones y clasificarlas según sean polos o singularidades esenciales. Calcule todos los desarrollos de Laurent de cada función centrados en cada singularidad.

*a)* $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^2(z-\pi)}$, *b)* $f(z) = z \exp\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$, *c)* $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z}$.

**Problema 3:** Calcule los tres términos de orden más bajo, no nulos, de la serie de Laurent de $\operatorname{cosec}(z)$ centrada en $z = 0$ que converge: *a)* alrededor del origen, *b)* en el punto $z = \pi + i$.

**Problema 4:** Demostrar que las singularidades de las funciones siguientes son polos. Determinar su orden y los correspondientes residuos:

*a)* $f(z) = \dfrac{1-\cosh(z)}{z^3}$ *b)* $f(z) = \tanh(z)$ *c)* $f(z) = \dfrac{z}{\cos(z)}$.

**Problema 5:** Determine las posibles series de Laurent para

$$f(z) = \frac{z^2 \cos(i/3z)}{z - \exp(i\pi/4)}\ ,\quad z \neq 0\ ,$$

centradas en $z = 0$ y sus respectivos anillos de convergencia.
¿Quá tipo de singularidad hay en $z = 0$? ¿Cuál es el residuo de $f$ en $z = 0$? ¿Cuál es el residuo de $f$ en $z = \exp(i\pi/4)$?

**Problema 6:** Considere la función compleja

$$f(z) = \frac{z}{1-z}\exp\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

de una variable compleja $z$.

*a)* Determine los ceros y su orden así como las singularidades y su tipo. ¿Cuántas series de Laurent centradas en $z = 0$ admite esta función y cuáles son los anillos de convergencia respectivos?

*b)* Determine la serie de Laurent de $f(z)$ centrada en $z = 0$ que converge en el punto $z = 2 - i$.

*Ayuda 1:* Calcule los coeficientes de la serie de Laurent de la parte exponencial de $f$ usando un camino cerrado simple apropiado.
*Ayuda 2:* Las funciones de Bessel de primera especie $J_n$ para orden entero $n$ admiten la representación

$$J_n(t) = (-1)^n J_{-n}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(ns - t\sin(s))\, ds\ ,\quad t \in \mathbb{R}\ .$$

**Problema 7:** Sea Log el logaritmo principal y considere la función

$$f(z) = \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{(\exp(8z)-1)^2}$$

de una variable compleja $z$.

*a)* ¿Que tipo de singularidad es el punto $z=-1$? Determine y clasifique todas las singularidades de $f$ fuera de la semirecta $\{z : Im(z) = 0\ ,\ Re(z) \leq -1\}$ (donde no está definido el logaritmo principal).

*b)* Discuta los posibles desarrollos de Laurent de $f$ centrados en $z=0$ en cuanto a los respectivos anillos de convergencia. Grafique.

*c)* Calcule la *parte principal* del desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en $z=0$, que converge alrededor de $z=0$.

*d)* Evalúe $\oint_C f(z)\,dz$ donde $C$ es una circumferencia centrada en $z=0$ orientada positivamente de radio $1/2$.

**Problema 8:** Si $C$ es la circunferencia unitaria recorrida en sentido positivo, evaluar las siguientes integrales:

*a)* $\displaystyle\int_C \frac{dz}{\mathrm{sen}(z)}$ *b)* $\displaystyle\int_C \frac{\exp(1/z)\,dz}{z}$ *c)* $\displaystyle\int_C \frac{\exp(-z)}{z(z+2)}dz$

**Problema 9:** Calcular la integral $\displaystyle\int_C \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$, en los casos en que $C$ es la circunferencia: i) $|z-2|=2$, ii) $|z|=4$, ambas recorridas en sentido antihorario.