FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 6 (2016); primeras indicaciones[1]

Problema 1: Probar las siguientes identidades.

a) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$\rightsquigarrow$ La integral existe ya que $1+x^2 > x^2$ y entonces, para $R > a > 0$, $\int_a^R (1+x^2)^{-1}\, dx < \int_a^R x^{-2}\, dx = (-1/x)|_a^R = (1/a) - (1/R)$ de modo que $\int_a^\infty x^{-2}\, dx = 1/a$. Pero este análisis previo no es necesario ya que, como verán, se desprende de la integración compleja. Con $f(z) = 1/(1+z^2)$ el grado del polinomio en el denominador excede en 2 el grado del polinomio del numerador.

b) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

$\rightsquigarrow$ Como en a) la integral existe pero esto también se desprende de la integración compleja. $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ es cociente de dos polinomios donde el grado del numerador excede en 4 a aquel del numerador.

c) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$\rightsquigarrow$ Como en a) y b) la existencia de la integral es inmediata con métodos reales pero se desprende también de la integración compleja. En $f(z) = 1/(1+z^4)$, el grado del polinomio del denominador excede en 4 aquel del numerador, es analítica salvo en etc.

d) $$\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$$

$\rightsquigarrow$ ¡La cosa empieza a aburrir! Todo lo que se dijo en general en a),b) y c) es válido. El exceso del grado de abajo sobre el de arriba es 2.

e) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\mathrm{sen}(\theta)} = \frac{2\pi}{3}$$

$\rightsquigarrow$ Se usa la fórmula de integracion de una función racional g de las dos variables $\cos(\theta)$ y $\mathrm{sen}(\theta)$

$$\int_0^{2\pi} g(\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta))\, d\theta$$

$$= 2\pi \text{ suma de los residuos de } F \text{ en los polos encerrados por el círculo } C(0,1)\ ,$$

donde $F(z) = g\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2}\right)/z$.

f) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad -1 < a < 1.$$

$\rightsquigarrow$ Idem e).

[1] G.A. Raggio

g) $\displaystyle\int_0^\pi (\text{sen}(\theta))^{2n} d\theta = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$

$\rightsquigarrow$ Se observa que $(\text{sen}(\theta+\pi))^{2n} = (\text{sen}(\theta))^{2n}$ de modo que

$$\int_0^\pi (\text{sen}(\theta))^{2n}\, d\theta = (1/2)\int_0^{2\pi} (\text{sen}(\theta))^{2n}\, d\theta$$

y se procede como en e) y f).

h) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \frac{dt}{1+\text{sen}(t)^2} = \sqrt{2}\,\pi$

$\rightsquigarrow$ Ya que el integrando es 2π-periódico, la integral es igual a aquella sobre cualquier intervalo de largo 2π; por lo tanto $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1+\text{sen}(t)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\text{sen}(t)^2}$ y se procede como en e)-g).

i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)\, dx}{1+x^2} = 0$

$\rightsquigarrow$ Este es el primer problema interesante. El problema es elegir una rama adecuada del logaritmo. Supongase que

$$\phi(z) = \ln|z| + i\alpha(z)\ ,\ \ \alpha(z) \in \arg(z)\ ,$$

es la rama buscada y consideremos un arco de círculo $S(0,r,A)$ centrado en $z=0$, radio r y largo A (la orientación es irrelevante). Entonces $S(0,r,A) = \{z(t) = r\exp(it) : t \in T\}$ donde T es un intervalo real de largo A. Cuando $r \neq 1$, tenemos que

$$|1+r^2\exp(2it)| \geq |r^2-1|\ ,\ \ |\ln(r)+\alpha(\exp(it))| \leq |\ln(r)| + M\ ,$$

donde $M := \max_{t\in T} |\alpha(\exp(it)|$ (la rama es continua y T es cerrado y acotado). Si este camino está en el dominio de definición de la rama ϕ, la hipótesis $r \neq 1$ garantiza que $S(0,r,A)$ evita los polos simples $\pm i$, y

$$\left|\int_{S(0,r,A)} \frac{\phi(z)}{1+z^2}\, dz\right| = \left|ir\int_T \frac{\ln(r)+i\alpha(\exp(it))}{1+r^2\exp(2it)}\, \exp(it)dt\right|$$
$$\leq \frac{Ar(|\ln(r)|+M)}{|r^2-1|}\ .$$

El logaritmo natural real tiene las fantásticas propiedades:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-a}\ln(x) = 0\ ,\ \ \lim_{x\to 0} x^a \ln(x) = 0\ ,\ \ a > 0\ .$$

Y esto implica que tanto

$$\lim_{r\to 0}\int_{S(0,r,A)} \frac{\phi(z)}{1+z^2}\, dz = 0$$

como

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S(0,r,A)} \frac{\phi(z)}{1+z^2}\, dz = 0\ ,$$

si no abandonamos el dominio de definición de ϕ en el proceso de tomar el límite.

j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{4}$

$\rightsquigarrow$ La discusión preparatoria previa es idéntica a la del problema anterior. También en este caso la estimación del integrando $f(z) = \phi(z)/(1+z^2)^2$ en arcos de círculos muestran que

$$\lim_{r\to 0} \int_{C(0,r)^+} \frac{\phi(z)}{(1+z^2)^2}\,dz = \lim_{r\to\infty} \int_{C(0,r)^+} \frac{\phi(z)}{(1+z^2)^2}\,dz = 0\ .$$

Ahora $z = i$ es un polo doble y esto alarga el cálculo del residuo correspondiente pudiendose tomar la fórmula $Res(f/g, z_o) = \cdots$ para z_o un cero de orden 2 del denominador g.

k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2(a^2-b^2)}\Big(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\Big) \quad (a > b > 0)$

$\rightsquigarrow$ Recordando que

$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\text{sen}(x)\sinh(y)$$

vemos que el coseno no es de módulo acotado pues tanto cosh como sinh divergen exponencialmente cuando el argumento tiende a $\pm\infty$. A pesar de que el polinomio del denominador es de orden 4 este crecimiento no puede compensar un crecimiento exponencial. El camino usual $[-R, R] + C(0,R)^+$ no nos sirve ya que la estimación ML de la contribución del semicírculo no nos ayuda a ver que esta contribución se anula para $R \to \infty$ (¡aunque a posteriori sabremos que si lo hace!).

Problema 2: Calcular las integrales

$$a)\ \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\ dx\ ,$$

$\rightsquigarrow$ Revea el Problema 1k); el seno que es entero no es acotado (Teorema de Liouville). No podemos usar la desigualdad ML para ver que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)^+} \frac{\text{sen}(z)}{z}\,dz = 0\ .$$

$$b)\ p.v. \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4 - \pi^4}\ ,$$

$\rightsquigarrow$ Los polos del integrando real son $\pm\pi$ y se podría ver que por ejemplo $\lim_{b\to\pi^+} \int_b^\infty 1/(x^2 - \pi^4) = \infty$. A lo sumo podemos esperar de darle sentido a esta integral como valor principal.

$$c)\ \int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x^2} dx\ .$$

$\rightsquigarrow$ Como en 1k) y 2a) $z \mapsto \cos(z) - 1$ que es entera no es acotada y esto no nos permite usar la desigualdad ML para ver que la contribución de la integral sobre $C(0,R)^+$ se anula para $R \to \infty$.

Problema 3: Use el rectángulo en el plano complejo de vértices R, $R+i2\pi$, $-R+i2\pi$ y $-R$ para probar que para a real con $0<a<1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}\ .$$

$\rightsquigarrow$ Si Q_R ($R>0$) denota al perimetro del rectángulo que nos proponen –recorrido positivamente– y $f(z)=\exp(az)/(1+\exp(z))$, entonces de los ceros de $\exp(z)+1$ que son los números $z_k := i(2k+1)\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$, Q_R sólo encierra a $z_o = i\pi$ cualquiera sea $R>0$.

Problema 4: Verifique que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\ .$$

Sugerencia: Considere el sector circular $\{z=R\exp(i\alpha):\ 0\le\alpha\le 2\pi/3\}$.

$\rightsquigarrow$ Si S denota el sector circular de la sugerencia, y $f(z):=1/(1+z^3)$

$$\int_S f(z)\,dz = iR\int_0^{2\pi/3} \frac{\exp(i\alpha)}{1+R^3\exp(i3\alpha)}\,d\alpha\ ,$$

y entonces cuando $R>1$, ya que $|R^3\exp(i3\alpha)+1| \ge \big|\,|R^3\exp(i3\alpha)|-1\big| = R^3-1$

$$\left|\int_S f(z)\,dz\right| \le (2\pi/3)\frac{R}{R^3-1}\ .$$

Analice la integración sobre $\Gamma_R = S+[R\exp(i2\pi/3),0]+[0,R]$.