Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 6 (2016)

Problema 1: Probar las siguientes identidades.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$

e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\mathrm{sen}(\theta)} = \frac{2\pi}{3}$

f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad -1<a<1.$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\mathrm{sen}(\theta))^{2n} d\theta = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$

h) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1+\mathrm{sen}(t)^2} = \sqrt{2}\,\pi$

i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)\,dx}{1+x^2} = 0$

j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{4}$

k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2(a^2-b^2)}\Big(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\Big) \quad (a>b>0)$

Problema 2: Calcular las integrales

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx,$ *b)* *p.v.* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4-\pi^4},$ *c)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x^2}dx$

Problema 3: Use el rectángulo en el plano complejo de vértices R, $R+i2\pi$, $-R+i2\pi$ y $-R$ para probar que para a real con $0<a<1$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}\ .$$

Problema 4: Verifique que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\ .$$

Sugerencia: Considere el sector circular $\{z = R\exp(i\alpha):\ 0\le\alpha\le 2\pi/3\}$.