Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 6 (2016); segundas y últimas indicaciones[1]

Problema 1: Probar las siguientes identidades.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

$\rightsquigarrow$ Con $f(z) = 1/(1+z^2)$ tenemos una función analítica salvo en dos polos simples en $\pm i$ de residuo $Res(f, \pm i) = \mp i/2$. Ya que f es cociente de dos polinomios y el grado del polinomio del denominador es igual a 2 mas el grado del polinomio del numerador, $\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)^+} f(z)\,dz = 0$ para el semicírculo $C(0,R)^+$ de radio R alrededor de $z = 0$ (orientado positivamente). Ya que $\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = 2\int_0^R (1/(1+x^2))\,dx$, el Teorema de los Residuos (TdR) aplicado a $[-R, R] + C(0,R)^+$, entrega

$$2\int_0^\infty (1/(1+x^2))\,dx = 2\pi i\, Res(f, i) = \cdots .$$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$

$\rightsquigarrow$ $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ es analítica salvo en los polos $\pm i$ que son dobles. f es cociente de dos polinomios donde el grado del numerador excede en 4 a aquel del numerador. Entonces $\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)^+} f(z)\,dz = 0$ y por el TdR aplicado a $[-R, R] + C(0,R)^+$,

$$2\int_0^\infty (1/(1+x^2)^2)\,dx = (2\pi i) Res(f, i) = \cdots .$$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$\rightsquigarrow$ $f(z) = 1/(1+z^4)$ es analítica salvo en las cuatro raices cuárticas de -1 que son $z_k := \exp(i(1+2k)\pi/4)$, $k = 0, 1, 2, 3$; de estas solamente $z_0 = \exp(i\pi/4)$ y $z_1 = \exp(i3\pi/4)$ caen en el semiplano superior y son polos simples de f. Ya que el grado del polinomio del denominador excede por 4 aquel del numerador, $\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)^+} f(z)\,dz = 0$ de modo que el TdR aplicado a $[-R, R] + C(0,R)^+$ nos da

$$2\int_0^\infty dx/(1+x^4) = (2\pi i)\,(Res(f, z_o) + Res(f, z_1)) = \cdots .$$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$

$\rightsquigarrow$ ¡La cosa termina aburriendo! $f(z) = z^2/((z^2+1)(z^2+4))$ tiene polos simples en $\pm i$ y en $\pm 2i$. Nuevamente, el grado “de abajo” excede al “de arriba” en 2 y por ello no hay contribución de la intregral sobre $C(0,R)^+$ en el límite $R\to\infty$. El TdR aplicado al semidisco de siempre nos da

$$2\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = (2\pi i)\,(Res(f, i) + Res(f, 2i)) = \cdots .$$

[1] G.A. Raggio

e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\mathrm{sen}(\theta)} = \frac{2\pi}{3}$

$\rightsquigarrow$ No hay más indicaciones.

f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \qquad -1 < a < 1.$

$\rightsquigarrow$ Idem e).

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\mathrm{sen}(\theta))^{2n} d\theta = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$

$\rightsquigarrow$ Idem e)

h) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1+\mathrm{sen}(t)^2} = \sqrt{2}\,\pi$

$\rightsquigarrow$ ¡Hagamoslo!

$$F(z) = z^{-1}\frac{1}{1+\left(\frac{z+1/z}{2i}\right)^2} = \frac{-4z}{z^4-6z^2+1}\ ;$$

con polos en los ceros de $\phi(z) = z^4 - 6z^2 + 1$ solamente ($z = 0$ no es cero de ϕ). Por el Teorema fundamental del álgebra ϕ tiene cuatro ceros contando multiplicidades. Como ϕ es par, si z_o es un cero entonces $-z_o$ también lo es. Con $w := z^2$ pedimos

$$w^2 - 6w + 1 = 0$$

de modo que w toma uno de los dos valores

$$w_\pm := 3 \pm 2\sqrt{2}\ .$$

Observamos que $w_\pm > 0$ ya que $2\sqrt{2} < 3$ pues $4 \cdot 2 < 9$. Entonces los ceros de ϕ son:

$$z_o = \sqrt{w_-}\ ,\quad z_1 = \sqrt{w_+}\ ,$$

donde las raices cuadradas son las positivas, y $-z_o$ y $-z_1$. Como $w_+ > 3$, $z_+ > \sqrt{3} > 1$. Y, como $0 < w_- < 1$ (pues $3 - 2\sqrt{2} < 1$ es equivalente a $2 < 2\sqrt{2}$), deducimos que $z_o < 1$. Por lo tanto los únicos polos de F dentro del disco unitario son $\pm z_o$ y ambos son simples. Ahora,

$$Res(F, -z_o) = \lim_{z\to -z_o} \frac{-(z+z_o)4z}{(z-z_o)(z+z_o)(z^2-z_1^2)} = \frac{4z_o}{-2z_o(z_o^2-z_1^2)} = -2/(z_o^2-z_1^2)\ ,$$

$$Res(F, z_o) = \lim_{z\to z_o} \frac{-(z-z_o)4z}{(z-z_o)(z+z_o)(z^2-z_1^2)} = \frac{-4z_o}{2z_o(z_o^2-z_1^2)} = -2/(z_o^2-z_1^2)\ ,$$

de modo que ambos residuos son iguales y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1+\mathrm{sen}(t)^2} = 2\pi\, 2Res(F, z_o) = -8\pi/(z_o^2 - z_1^2) = \frac{-8\pi}{w_- - w_+} = \frac{-8\pi}{-4\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi\ .$$

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(x)\,dx}{1+x^2} = 0$

$\rightsquigarrow$ Pero entonces teniendo en cuenta la primera indicación, si la rama ϕ es tal que esta definida en el semiplano superior cerrado pero sin $z = 0$, y el arco $S(0, r, A)$

cae en este semiplano, los dos límites mencionados anteriormente pueden hacerse. Todos estos requisitos se cumplen si

$$\phi(z) = \ln|z| + i\arg_{-\pi/2}(z)$$

o sea si tomamos el argumento en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi 2]$ con corte de ramificación en el semieje imaginario negativo y el camino (cerrado simple)

$$\Gamma_{\epsilon,R} := [\epsilon, R] + C(0,R)^{+} + [-R,-\epsilon] + C(0,\epsilon)^{-}\ ,\quad 0\epsilon < 1 < R\ ,$$

siendo, como siempre, $[z_1, z_2] = \{z(t) = (1-t)z_1 + tz_2 : 0 \le t \le 1\}$; y $C_(0,r)^{\pm}$ el semicírculo de radio $r > 0$ centrado en $z = 0$ orientado positivamente (caso $+$) respectivamente orientado negativamente (caso $-$). Ya que el corte de ramificación de ϕ es el semieje imaginario negativo, $\Gamma_{\epsilon,R}$ está siempre en el dominio de analiticidad de ϕ cualesquiera sean ϵ y R que cumplen las condiciones $0 < \epsilon < 1 < R$. Es de observar que Γ_ϵ está orientado positivamente. Todo está listo para integrar $f(z) = \phi(z)/(1+z^2)$ sobre $\Gamma_{\epsilon,R}$ obteniendose

$$(2\pi i)Res(f,i) = \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)\,dz = \int_{[\epsilon,R]} f(z)\,dz + \int_{[-R,-\epsilon]} f(z)\,dz$$

$$+ \int_{C(0,R)^{+}} f(z)\,dz - \int_{C(0,\epsilon)^{+}} f(z)\,dz\ .$$

Las dos integrales sobre los semicírculos se anulan en el límite $R \to 0$ y $\epsilon \to 0$ respectivamente ya que ambos semicírculos tienen como traza un arco centrado en 0 de largo π. Ahora, como $\arg_{-\pi/2}(x) = 0$ si $x > 0$,

$$\int_{[\epsilon,R]} f(z)\,dz = \int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx\ ;$$

y como $\arg_{-\pi/2}(x) = \pi$ para $x < 0$,

$$\int_{[-R,-\epsilon]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\ln|x| + i\pi}{1+x^2}\,dx\ = \int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln(x) + i\pi}{1+x^2}\ ;$$

de modo que

$$(2\pi i)Res(f,i) = 2\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx + i\pi\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

y deducimos que ambas integrales existen. Calculando el residuo,

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{\ln|z| + i\arg_{-\pi/2}(z)}{z+i} = \pi/4\ ,$$

obtenemos –al igualar partes reales e imaginarias por separado– el resultado anunciado y, además de regalo, también la fórmula de integración de a).

j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{4}$

$\rightsquigarrow$ No hay mas indicaciones.

k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2(a^2-b^2)}\Big(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\Big) \quad (a>b>0)$

$\rightsquigarrow$ Tomamos $f(z) := \exp(iz)/((z^2+a^2)(z^2+b^2))$ donde –por ahora– tanto a como b son reales. Claramente $\pm ia$ y $\pm ib$ son polos cuyo orden dependerá de si hay o no una relación entre a y b o alguno de estos números se anula. Tomemos nuestro semicírculo preferido $C(0,R)^+$ con $R > \max\{|a|,|b|\}$ y estimemos

$$\left|\int_{C(0,R)^+} f(z)\,dz\right| = \left|iR\int_0^\pi \frac{\exp(iR\cos(t) - R\mathrm{sen}(t))}{(R^2\exp(2it)-a^2)(R^2\exp(2it)-b^2)}\ \exp(it)\,dt\right|$$

$$\leq R\int_0^\pi \frac{\exp(-R\sin(t))}{|R^2\exp(2it)-a^2|\,|R^2\exp(2it)-b^2|}\,dt\ .$$

Pero en el intervalo $[0,\pi]$ se tiene $\mathrm{sen}(t)\geq 0$ de modo que allí, $\exp(-R\mathrm{sen}(t))\leq 1$ y usando $|z-w|\geq \big|\,|z|-|w|\,\big|$ tenemos

$$\left|\int_{C(0,R)^+} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}$$

y el miembro derecho tiende tranquilamente a cero cuando $R\to\infty$. Esto nos convence que $[-R,R]+C(0,R)^+$ es un excelente candidato para nuestra tarea. Pero, si a o b se anulan, el integrando tiene un polo doble (o cuadruple si $a=b=0$) en 0 de modo que hay que evitarlo y considerar $[-R,\epsilon]+C(0,\epsilon)^- + [\epsilon,R]+C(0,R)^+$ como camino a usar. Pero no tenemos visto que pasa con $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C(0,\epsilon)^-} f(z)\,dz$ cuando 0 no es un polo simple de f[2].

Suponemos entonces que $a\neq 0\neq b$, y más especificamente $a,b>0$ ya que la integral buscada es invariante ante cambios de signo de a o b. Tenemos entonces polos en ia y ib que son ambos simples si $a\neq b$ y, en el caso $a=b$ un polo doble en ia. Ya que

$$\int_[-R,R] f(z)\,dz = \int_{-R}^0 \frac{\cos(t)+i\mathrm{sen}(t)}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt + \int_0^R \frac{\cos(t)+i\mathrm{sen}(t)}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt$$

$$= \int_0^R \frac{\cos(t)-i\mathrm{sen}(t)}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt + \int_0^R \frac{\cos(t)+i\mathrm{sen}(t)}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt = 2\int_0^R \frac{\cos(t)}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt$$

el TdR indica que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt = (2\pi i)\left\{\begin{array}{lcl} Res(f,ia)+Res(f,ib) & , & 0\neq a\neq b\neq 0 \\ Res(f,ia) & , & a=b\neq 0 \end{array}\right. ,$$

lo que nos muestra que la integral existe y reduce el cálculo de ella a aquel de los residuos necesarios.

Problema 2: Calcular las integrales

$$a)\ \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\ dx\ ,$$

$\rightsquigarrow$ Tomamos

$$f(z) = z^{-1}\exp(iz)$$

que tiene un polo simple en $z=0$ de residuo $Res(f,0)=1$. Ahora,

$$\int_{[-R,-\epsilon]} f(z)\,dz = -\int_\epsilon^R \frac{\exp(-ix)}{x}\,dx\ ;$$

[2] Esto se podría hacer por supuesto.

$$
\begin{aligned}
\int_{[\epsilon,R]} f(z)\,dz &= \int_{\epsilon}^{R} \frac{\exp(ix)}{x}\,dx\ ;\\
\left|\int_{C(0,R)^+} F(z)\,dz\right| &= \left| iR\int_0^{\pi} \frac{\exp(iR\cos(t)-R\mathrm{sen}(t))}{R\exp(it)}\ \exp(it)\,dt\right|\\
&\le \int_0^{\pi} \exp(-R\mathrm{sen}(t))\,dt < \pi/R\ ,
\end{aligned}
$$

por el Lema de Jordan; y

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C(0,\epsilon)^-} f(z)\,dz = -i\pi Res(f,0)\ ,
$$

por un resultado general válido para polos simples. Entonces el camino cerrado simple (positivamente orientado) $[-R,-\epsilon]+C(0,\epsilon)^-+[\epsilon,R]+C(0,R)^+$ no encierra singularidades de F para $R>\epsilon>0$ de modo que

$$
\int_{[-R,-\epsilon]} f(z)\,dz + \int_{[\epsilon,R]} f(z)\,dz + \int_{C(0,R)^+} F(z)\,dz + \int_{C(0,\epsilon)^-} f(z)\,dz = 0\ ,
$$

y por lo tanto

$$
2i\int_{\epsilon}^{R} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\,dx = -\int_{C(0,R)^+} F(z)\,dz - \int_{C(0,\epsilon)^-} f(z)\,dz\ ;
$$

con lo cual

$$
\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\,dx = -\frac{1}{2i}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C(0,\epsilon)^-} f(z)\,dz = \pi Res(f,0)/2 = \pi/2\ .
$$

$$
b)\ p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4-\pi^4}\ ,
$$

$\rightsquigarrow$ A los polos reales (que son simples) se le agregan $\pm i\pi$ (que también son simples) cuando consideramos $f(z)=1/(z^4-\pi^4)$. No hay problema alguno en ver que

$$
\lim_{R\to\infty}\int_{C(0,R)^+} f(z)\,dz = 0
$$

ya que el módulo del integrando en el semicírculo está acotado por $R/(R^4-\pi^4)$ cuando $R>\pi$. Pero hay que evitar los polos reales lo que hacemos con el camino cerrado simple orientado positivamente

$$
\Gamma_{\epsilon,\delta,R} = [-R,-\pi-\epsilon]+C(-\pi,\epsilon)^-+[-\pi+\epsilon,0]+[0,\pi-\delta]+C(\pi,\delta)^-+[\pi+\delta,R]+C(0,R)^+
$$

definido para $\epsilon>0$, $\delta>0$, y $R>0$ con $\pi>\max(\epsilon,\delta)$ y $R>\pi+\max(\epsilon,\delta)$. Este camino encierra solamente el polo simple $i\pi$ de f con residuo

$$
Res(f,i\pi) = \lim_{z\to i\pi} \frac{(z-i\pi)}{(z-i\pi)(z+i\pi)(z-\pi)(z+\pi)} = \frac{i}{4\pi^3}\ .
$$

Por lo tanto tomando el límite $R\to\infty$ obtenemos, haciendo y procesando las cuatro integrales sobre los segmentos reales

$$
\int_{\pi+\epsilon}^{\infty} \frac{dx}{x^4-\pi^4} + \int_0^{\pi-\epsilon} \frac{dx}{x^4-\pi^4} + \int_{\pi+\delta}^{\infty} \frac{dx}{x^4-\pi^4} + \int_0^{\pi-\delta} \frac{dx}{x^4-\pi^4}
$$

$$= (2\pi i) Res(f, i\pi) - \int_{C(-\pi,\epsilon)^-} f(z)\, dz - \int_{C(\pi,\delta)^-} f(z)\, dz \ .$$

Como tanto π como $-\pi$ son polos simples vale

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C(-\pi,\epsilon)^-} f(z)\, dz = -i\pi Res(f, -\pi) \ , \ \lim_{\delta\to 0} \int_{C(\pi,\delta)^-} f(z)\, dz = -i\pi Res(f, \pi) \ ;$$

pero

$$Res(f, -\pi) = \lim_{z\to -\pi} \frac{(z+\pi)}{(z-i\pi)(z+i\pi)(z-\pi)(z+\pi)} = -1/4\pi^3 \ ,$$

y

$$Res(f, \pi) = \lim_{z\to \pi} \frac{(z-\pi)}{(z-i\pi)(z+i\pi)(z-\pi)(z+\pi)} = 1/4\pi^3 \ .$$

Concluimos entonces que

$$2\ p.v. \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 - \pi^4} = (2\pi i) Res(f, i\pi) = -1/(2\pi^2) \ .$$

Obviamente $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} ... = 2\, p.v. \int_0^\infty ... = -1/(2\pi^2)$ pues el integrando es par.

$$c) \ \int_0^\infty \frac{\cos(x) - 1}{x^2} dx \ .$$

$\rightsquigarrow$ Recurrimos a

$$f(z) := \frac{\exp(iz) - 1}{z^2}$$

que tiene una única singularidad que es un polo simple en $z = 0$ (pues 0 es cero simple del numerador y doble del denominador). El residuo asociado es:

$$Res(f, 0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\exp(iz) - 1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{i \exp(iz)}{1} = i \ .$$

Se sugiere entonces usar el camino cerrado simple $[-R, -\epsilon] + C(0, \epsilon)^- + [\epsilon, R] + C(0, R)^+$ definido para $R > \epsilon > 0$ que está positivamente orientado. Ya que

$$\int_{[-R,-\epsilon]} f(z)\, dz = \int_\epsilon^R \frac{\cos(x) - 1 - i\sin(x)}{x^2}\, dx \ ,$$

$$\int_{[\epsilon,R]} f(z)\, dz = \int_\epsilon^R \frac{\cos(x) - 1 + i\sin(x)}{x^2}\, dx \ ,$$

obtenemos

$$2 \int_\epsilon^R \frac{\cos(x) - 1}{x^2}\, dx = -\int C(0, R)^+ f(z)\, dz - \int_{C(0,\epsilon)^-} f(z)\, dz \ .$$

Ahora, como siempre,

$$\left| \int C(0, R)^+ f(z)\, dz \right| \leq \frac{1}{R} \int_0^\pi \exp(-R\mathrm{sen}(t)) dt \ ;$$

y ya que $\exp(-R\sin(t)) \leq 1$ en $[0, \pi]$ (o usando el Lema de Jordan) vemos que la contribución de $C(0, R)^+$ se anula para $R \to \infty$. Como 0 es polo simple (!), el resultado general nos da

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C(0,\epsilon)^-} f(z)\, dz = -i\pi Res(f, 0) = \pi$$

de modo que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x^2}\, dx = \, -\pi/2\ .$$

Con la fórmula para el seno del ángulo medio esto se reescribe a

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(t)^2}{t^2}\, dt = \pi/2\ .$$

Problema 3: Use el rectángulo en el plano complejo de vértices R, $R+i2\pi$, $-R+i2\pi$ y $-R$ para probar que para a real con $0<a<1$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}\ .$$

$\rightsquigarrow$ Si Q_R $(R>0)$ denota al perímetro del rectángulo que nos proponen recorrido positivamente y $f(z)=\exp(az)/(1+\exp(z))$, entonces de los ceros de $\exp(z)+1$ que son los números $z_k := i(2k+1)\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ solo queda encerrado $z_o = i\pi$ cualquiera sea $R>0$. El numerador $\exp(az)$ no tiene ceros de modo que z_o es el único polo de f encerrado por Q_R y, como la derivada de $\exp(z)+1$ que es $\exp(z)$ toma el valor -1 en z_o, se trata de un polo simple. El residuo correspondiente es

$$Res(f,z_o) = \lim_{z\to z_o} \frac{(z-z_o)\exp(az)}{1+\exp(z)} = \lim_{z\to z_o} \frac{\exp(az)}{\frac{1+\exp(z)-[1+\exp(z_o)]}{z-z_o}} = \frac{\exp(az_o)}{\exp(z_o)} = -\exp(ia\pi)\ .$$

Tenemos entonces

$$\int_{Q_R} f(z)\, dz = (2\pi i) Res(f,0) = -2\pi i \exp(ia\pi)\ .$$

Ahora, $Q_R = [-R,R]+[R,R+i2\pi]+[R+i2\pi,-R+i2\pi]+[-R+i2\pi,-R]$ y

$$\int_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{-R}^R \frac{\exp(ax)}{1+\exp(x)}\, dx\ ;$$

$$\int_{[R+i2\pi,-R+i2\pi]} f(z)dz = \int_R^{-R} \frac{\exp(ax+i2a\pi)}{1+\exp(x+i2\pi)}\, dx = -\exp(i2a\pi)\int_{-R}^R \frac{\exp(ax)}{1+\exp(x)}\, dx\ ;$$

$$\int_{[R,R+i2\pi]} f(z)dz = i\int_0^{2\pi} \frac{\exp(aR+iax)}{1+\exp(R+ix)}\, dx = i\exp(-(1-a)R)\int_0^{2\pi} \frac{\exp(iax)}{\exp(-R)+\exp(ix)}\, dx\ ;$$

$$\int_{[-R+i2\pi,-R]} f(z)dz = i\int_{2\pi}^0 \frac{\exp(-aR+iax)}{1+\exp(-R+ix)}\, dx = -i\exp(-aR)\int_0^{2\pi} \frac{\exp(iax)}{\exp(-R+ix)+1}\, dx\ .$$

Ahora estimamos las integrales sobre los dos segmentos verticales. En primer lugar

$$\left|\int_{[R,R+i2\pi]} f(z)dz\right| \le \exp(-(1-a)R)\int_0^{2\pi} \frac{1}{|\exp(-R)+\exp(ix)|}\, dx \le 2\pi\frac{\exp(-(1-a)R)}{1-\exp(-R)}$$

ya que $|\exp(-R)+\exp(ix)| \ge |\,|\exp(-R)|-|\exp(ix)|\,| = 1-\exp(-R)$. Entonces

$$\lim_{R\to\infty}\int_{[R,R+i2\pi]} f(z)dz = 0$$

ya que $\lim_{R\to\infty}\exp(-(1-a)R)/(1-\exp(-R)) = 0$ pues $a<1$. En segundo lugar

$$\left|\int_{[-R+i2\pi,-R]} f(z)dz\right| \le \exp(-aR)\int_0^{2\pi} \frac{1}{|\exp(-R+ix)+1|}\, dx \le 2\pi\frac{\exp(-aR)}{1-\exp(-R)}$$

ya que $|\exp(-R+ix)+1| \geq |\,|\exp(-R)\exp(ix)|-1\,| = 1-\exp(-R)$. Nuevamente $a>0$ acarrea que $\lim_{R\to\infty}\int_{[-R+i2\pi,-R]} f(z)dz = 0$. Por lo tanto,

$$(1-\exp(i2a\pi))\; p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ax)}{1+\exp(x)}\, dx = -2\pi \exp(ia\pi)\ ,$$

de donde se obtiene la fórmula deseada ¡pero para el valor principal! Para completar hay que usar el siguiente resultado general

LEMA: Si ψ es no-negativa sobre la recta real y $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx$ es finito entonces la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx$ existe y es igual a su valor principal.

Demostración: Sea P el valor principal. Tenemos para todo a y b reales con $a<b$, ya que siempre hay $R>0$ con $-R<a<b<R$

$$\int_a^b \psi(x)\, dx \leq \int_{-R}^{R} \psi(x)\, dx \leq P\ .$$

Y tanto $0<a \mapsto \int_{-a}^{b} \psi(x)\, dx$ como $0<b \mapsto \int_a^b \psi(x)\, dx$ son no-decrecientes. En particular, $0<b \mapsto \int_0^b \psi(x)\, dx$ es no decreciente y acotado con lo cual

$$B := \lim_{b\to\infty} \int_0^b \psi(x)\, dx$$

existe. Análogamente, $0<a \mapsto \int_{-a}^{0} \psi(x)\, dx$ es no decreciente y acotado y

$$A := \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} \psi(x)\, dx$$

existe. Pero entonces

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{b\to\infty} \int_{-a}^{b} \psi(x)\, dx = \lim_{a\to\infty}\left(\int_{-a}^{0} \psi(x)\, dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \psi(x)\, dx \right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} \psi(x)\, dx + B = A + B$$

y, similarmente,

$$\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{b} \psi(x)\, dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b \psi(x)\, dx + \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^0 \psi(x)\, dx \right) = B + A\ .$$

De modo que la integral impropia existe y se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx = A + B\ .$$

Ahora, para $R>0$

$$|P-(A+B)| \leq \left| P - \int_{-R}^{R} \psi(x)\, dx \right| + \left| \int_{-R}^{0} \psi(x)\, dx + \int_0^R \psi(x)\, dx - (A+B) \right|$$

$$\leq \left| P - \int_{-R}^{R} \psi(x)\, dx \right| + \left| \int_{-R}^{0} \psi(x)\, dx - A \right| + \left| \int_0^R \psi(x)\, dx - B \right|\ .$$

Dado $\epsilon>0$, hay $R_1>0$ tal que para todo $R>R_1$ se tiene

$$\left| P - \int_{-R}^{R} \psi(x)\, dx \right| \leq \epsilon/3\ ;$$

hay $R_2 > 0$ tal que para todo $R > R_2$ se tiene

$$\left| \int_{-R}^{0} \psi(x)\, dx - A \right| \leq \epsilon/3 \; ;$$

y hay $R_3 > 0$ tal que para todo $R > R_3$

$$\left| \int_{0}^{R} \psi(x)\, dx - B \right| \leq \epsilon/3 \; .$$

Entonces tomando un $R > \max\{R_1, R_2, R_3\}$ obtenemos $|P - (A + B)| \leq \epsilon$. O sea, $P = A + B$.

Problema 4: Verifique que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\, dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \; .$$

Sugerencia: Considere el sector circular $\{z = R\exp(i\alpha) : \; 0 \leq \alpha \leq 2\pi/3\}$.

$\rightsquigarrow$ Con $\Gamma_R = S + [R\exp(i2\pi/3), 0] + [0, R]$ tenemos un camino cerrado simple orientado positivamente. Por un lado

$$\int_{[0,R]} f(z)\, dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^3}\, dx \; ;$$

por otro lado con $[R\exp(i2\pi/3), 0] = \{z(t) := t\exp(i2\pi/3) : \; R \geq t \geq 0\}$,

$$\int_{[R\exp(i2\pi/3),0]} f(z)\, dz = \int_R^0 \frac{\exp(i2\pi/3)}{1 + t^3\exp(3i2\pi/3)}\, dx = -\exp(i2\pi/3)\int_0^R \frac{1}{1+x^3}\, dx \; .$$

¿Que singularidades de f encierra este camino? Los ceros de $1 + z^3$ son las raices cúbicas de -1 que son tres:

$$z_o = \exp(i\pi/3) \; , \;\; z_1 = -1 \; , \;\; z_2 = \exp(i5\pi/3) = z_o^2 z_o^3 = -z_o^2 \; ,$$

que son todos ceros simples y solamente z_o es encerrado por Γ_R cualquiera sea $R > 1$. El polo simple z_o de f tiene residuo

$$Res(f, z_o) = \lim_{z\to z_o} \frac{z - z_o}{(z-z_o)(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{(z_o - z_1)(z_o - z_2)} = \frac{1}{z_o(z_o+1)^2} \; .$$

Por el TdR ya que $\exp(i2\pi/3) = z_o^2$

$$(1 - z_o^2)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{(2\pi i)}{z_o(1+z_o)^2}$$

o sea que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{(2\pi i)}{z_o(1+z_o)^2(1-z_o^2)} = \frac{2\pi i}{3(z_o + z_o^2)} \; .$$

Ahora:

$$z_o = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \; ,$$

$$z_o^2 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \; ,$$

de modo que $z_o + z_o^2 = i\sqrt{3}$ y se obtiene el resultado.

Observación: Usando el camino cerrado simple orientado positivamente $[-R, -1-\epsilon] + C(-1,\epsilon)^- + [-1+\epsilon, R] + C(0,R)^+$ y la integral recién determinada se puede calcular $p.v. \int_0^\infty (1/(1-x^3))\, dx$.