Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 7 (2016)

Problema 1: Considere las familias de funciones $\text{sen}(\frac{2\pi nx}{L})$ y $\cos(\frac{2\pi mx}{L})$ para n, $m \in \mathbb{N}$ (verifique que son periódicas de período L)

a) Demuestre, por integración directa, las siguientes relaciones de ortogonalidad:

1) $\int_0^L \cos(\frac{2\pi nx}{L})\,\text{sen}(\frac{2\pi mx}{L})dx = 0$

2) $\int_0^L \cos(\frac{2\pi nx}{L})\cos(\frac{2\pi mx}{L})dx = \frac{L}{2}\delta_{n,m}$

3) $\int_0^L \text{sen}(\frac{2\pi nx}{L})\,\text{sen}(\frac{2\pi mx}{L})dx = \frac{L}{2}\delta_{n,m}$

b) Utilice las relaciones de ortogonalidad para encontrar la expresión de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una función $f(x)$ con período L. Es decir, encuentre a_n y b_n tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n\,\text{sen}\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)\right)$$

Problema 2: Calcule las series de Fourier de senos y cosenos para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ *b)* $f(x) = x^2,\ -\pi \leq x \leq \pi$

c) $f(x) = x \quad \text{si } 0 < x < 2$ *d)* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \end{cases}$

Problema 3: Expanda la función del ítem *a* del ejercicio anterior en su serie de Fourier con exponenciales complejas e^{inx} en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Verifique que el resultado es el mismo al ya obtenido.

Problema 4: Se desea obtener una serie de Fourier de senos que represente a la parábola $f(x) = 4x(1-x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

- Extienda la función $f(x)$ al intervalo $[-1, 1]$ en forma apropiada y calcule la expansión deseada.
- Responda y justifique su respuesta:
  a) ¿Converge la serie a $f(x)$ en todo punto de $[0, 1]$?
  b) ¿Converge la serie uniformemente en $[0, 1]$?
  c) ¿Converge la serie en media cuadrática en $[0, 1]$?
- Utilice la serie calculada para hallar el valor de la serie numérica $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots$

Problema 5: Para cada una de las siguientes funciones definidas en $[-\pi, \pi]$ calcular la serie de Fourier y estudiar su convergencia.

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

c) $f(x) = \cos(x/2)$

d) $f(x) = |x|$

e) $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, $f(-\pi) = 0$.

Problema 6: Evaluando en un punto apropiado el desarrollo en serie de Fourier de la función $h(x) = -x$ si $x \in (-1/2, 0]$ y $h(x) = x$ si $x \in [0, 1/2)$, calcule el valor de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Problema 7: Sea $f(x) = e^{sx}$, si $x \in (-\pi, \pi]$.

a) Calcule la serie de Fourier de $f(x)$.

b) Use la serie hallada para probar que

$$\frac{\pi}{s}\coth(\pi s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^2 + n^2}.$$

Problema 8: Determine la serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & , \quad 0 \le t \le \pi \\ 0 & , \quad \pi \le t \le 2\pi \end{cases} .$$

¿Qué puede decirse sobre la convergencia puntual y la convergencia en media cuadrática de esta serie?
Úsela para determinar la suma de la serie alternante

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots .$$

Problema 9: Considere la función $f(t) = \cosh(t)$, $|t| \le \pi$.

a) Desarrolle $f(t)$ en serie de Fourier y explique si la serie converge: puntualmente, uniformemente y/o en media cuadrática. Justifique.

b) Utilice la serie hallada en a para evaluar la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Problema 10: Considere la función $f(t) = t^3$, en el intervalo $0 \le t \le 1$. Se quiere desarrollar esta función en una serie

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cos(n2\pi t/T) ,$$

donde $T > 0$.

a) Determine el período T y los coeficientes c_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

b) Discuta la convergencia de la serie hallada.

c) Determine la suma de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2$.

Una fórmula de integración indefinida: $\int x^3 \cos(x)\, dx = (3x^2-6)\cos(x)+x(x^2-6)\sin(x)$.

Problema 11: Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1+(x+1)^2, & \text{si } -2 < x < 0 \\ 1-(x-1)^2, & \text{si } 0 \le x \le 2, \end{cases}$$

a) Calcule la serie de Fourier en senos y cosenos de $f(x)$.

b) Discuta la convergencia de la serie hallada.

c) Utilice la serie hallada para evaluar: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$.