Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 8 (2016)

Problema 1: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y' + 3y = x + e^{-2x}$

b) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

c) $y' + (1/x)y = 3\cos(2x),\ x > 0$

d) $(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}$

e) $dy/dt = \big(\Gamma\cos(t) + T\big)y - y^3$, donde Γ y T son constantes. *Ayuda:* Esta es una ecuación de Bernoulli. Se sugiere usar el método de Leibniz, sustituyendo $v = y^{1-n}$ con $n = 3$

f) $y' = \frac{x^2}{y}$

g) $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$

h) $y' + y^2\,\mathrm{sen}(x) = 0$

i) $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

j) $y' = \cos^2(x)\cos^2(2y)$

k) Demuestre que la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{x-y}$ no es separable pero que si se sustituye $v = y/x$ entonces la ecuación es separable en x y v, encuentre su solución.

Problema 2: Encontrar la solución a los problemas con valor inicial y determinar el intervalo en que dicha solución es válida.

a) $xy' + (x + 1)y = x,\ y(\ln 2) = 1$

b) $dy/dx = 1/(e^y - x),\ y(1) = 0$
Ayuda: Considere a y como variable independiente en vez de x

c) $y' + \cot(x)y = 4\sin(x),\ y(-\pi/2) = 0$

d) $(1 - x^2)y' - xy = x(1 - x^2),\ y(0) = 2$

e) $xdx + ye^{-x}dy = 0$, $y(0) = 1$

f) $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}$, $r(1) = 2$

g) $y' = \frac{1+3x^2}{3y^2-6y}$, $y(0) = 1$
Ayuda: Buscar los puntos en los que $\frac{dx}{dy} = 0$

h) $y' = \frac{3x^2}{3y^2-4}$, $y(1) = 0$

i) Considere el problema de valor inicial $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$.

1) ¿Existe una solución que pase por el punto (1,1)?. En caso afirmativo halle esa solución.

2) ¿Existe una solución que pase por el punto (2,1)?. En caso afirmativo halle esa solución.

3) Considere todas las soluciones posibles del problema con valor inicial dado. Determine el conjunto de valores que tienen estas soluciones en $x = 2$.

Problema 3:

a) Sobre un cuerpo que cae en un líquido relativamente denso, por ejemplo aceite, actúan tres fuerzas (ver Fig. 1): una fuerza de resistencia R, una fuerza de empuje B y su peso w debido a la gravedad. La fuerza de empuje es igual al peso del fluido desplazado por el objeto. Para un cuerpo esférico de radio a que se mueve lentamente, la fuerza de resistencia queda definida por la ley de Stokes $R = 6\pi\mu a\,|v|$, en donde v es la velocidad del cuerpo y μ es el coeficiente de viscosidad del fluido circundante.

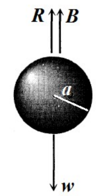

Figura 1: Un cuerpo esférico que cae en un fluido denso.

1) Encuentre la velocidad límite de una esfera maciza de radio a y densidad ρ que cae libremente en un medio de densidad ρ' y coeficiente de viscosidad μ.
2) En 1910, el físico estadounidense R. A. Millikan (1868-1953) determinó la carga de un electrón al estudiar el movimiento de gotas de aceite diminutas al caer en un campo eléctrico. Un campo de intensidad E ejerce una fuerza Ee sobre una gota con carga e. Suponga que se ha ajustado E de modo que la gota se mantenga estacionaria ($v = 0$) y que w y B son como se da en el inciso a,1). Encuentre una fórmula para e. Millikan pudo identificar e como la carga sobre un electrón y determinar e=4.803x10^{-10} ues.

b) Problema de la braquistócrona: Uno de los problemas famosos en la historia de las matemáticas es el de la braquistócrona; hallar la curva a lo largo de la cual una partícula se deslizará sin fricción en el tiempo mínimo, de un punto P a otro Q, en donde el segundo punto está más bajo que el primero, pero no directamente debajo de éste (ver Fig. 2). Este problema fue propuesto por Johann Bernoulli como un desafío para los matemáticos de su época. Johann Bernoulli y su hermano Jakob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibniz y el Marqués de L'Hopital encontraron soluciones correctas. El problema de la braquistócrona es importante en el desarrollo de las matemáticas como uno de los precursores del cálculo de variaciones. Al resolver este problema es conveniente tomar el origen en el punto superior P y orientar los ejes como se muestra en la Fig. 2. El punto inferior Q tiene las coordenadas (x_0, y_0). Entonces, es posible demostrar que la curva de tiempo mínimo queda definida por una función $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$(1 + y'^2)y = k^2, \tag{1}$$

en donde k^2 es cierta constante positiva que debemos determinar posteriormente.

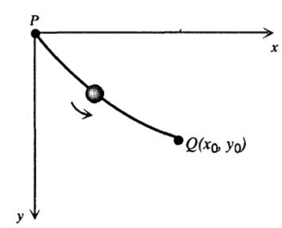

Figura 2: La braquistócrona.

1) Despeje y' de la ecuación (1). ¿Por qué es necesario elegir la raíz cuadrada positiva?.
2) Introduzca la nueva variable t mediante la relación

$$y = k^2 \sin^2(t). \tag{2}$$

Demuestre que la ecuación que encontró en el inciso b,1) toma entonces la forma

$$2k^2 \sin^2(t)dt = dx. \tag{3}$$

3) Si se hace $\theta = 2t$, demuestre que la solución (3) para la que $x = 0$ cuando $y = 0$ se expresa por

$$x = k^2[\theta - \sin(\theta)]/2, \quad y = k^2[1 - \cos(\theta)]/2. \tag{4}$$

Las ecuaciones (4) son ecuaciones paramétricas de la solución de (1) que pasa por $(0, 0)$. La gráfica de las ecuaciones (4) se llama cicloide. Si se hace una elección adecuada de la constante k, entonces la cicloide también pasa por el punto (x_0, y_0) y es la soluciín del problema de la braquistócrona. Es posible eliminar θ y obtener la solución de la forma $y = \phi(x)$; sin embargo, es más fácil usar las ecuaciones paramétricas.

Problema 4:

a) Determinar si cada una de las siguientes ecuaciones es exacta o no. En caso de serlo, hallar la solución.

1) $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$

2) $(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax-by}{bx-cy}$

4) $(\frac{y}{x} + 6x)dx + [ln(x) - 2]dy = 0$, $x > 0$

b) Demuestre que las siguientes ecuaciones no son exactas, aunque se transforman en exactas si se multiplican por el factor integrante dado. Luego, resuelva las ecuaciones.

1) $\left[\frac{\sin(y)}{y} - 2e^{-x}\sin(x)\right] dx + \left[\frac{\cos(y)+2e^{-x}\cos(x)}{y}\right] dy = 0, \ \mu(x, y) = ye^x$

2) $y\,dx + (2x - ye^y)dy = 0, \ \mu(x, y) = y$

c) Resuelva las siguientes ecuaciones (halle el factor integrante que las convierte en exactas).

1) $2y^2 + 3x + 2xyy' = 0$

2) $y(x + y + 1) + (x + 2y)y' = 0$

Problema 5:

a) Demostrar que las siguientes ecuaciones son homogéneas y encontrar sus soluciones.

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$

2) $2ydx - xdy = 0$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$

4) $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$

b) Demuestre que si

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es una ecuación homogénea, entonces uno de sus factores integrantes es

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x\,M(x,y)+y\,N(x,y)}.$$

Aplique este resultado para resolver las ecuaciones 2 y 3 del problema 5.a).