Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 9 (2016)

Problema 1: Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

a) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin(2x)$

b) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$

c) $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$

d) $y'' - y' - 2y = \cosh(2x)$

e) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin(x)$

f) $y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega x),\ \omega^2 \neq \omega_0^2$

Problema 2: Calcular la solución de los siguientes problemas de valores iniciales

a) $y'' - 2y' + y = xe^x + 4, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

b) $y'' + 4y = 3\sin(2x), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

c) $y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

d) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos(2x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

Problema 3: Utilize variación de constantes para hallar una solución particular de las siguientes ecuaciones:

a) $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$.

b) $x^2 y'' - 2y = 3x^2 - 1, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2$.

c) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln(x), \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^2$.

d) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 3x^{3/2}\sin(x), \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^{-1/2}\sin(x)$.

Problema 4: Utilize la fórmula de D'Alambert para encontrar una solución linealmente independiente de la dada.

a) $x^2 y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0, \quad x > 0,\ y_1(x) = x$.

b) $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0,\ y_1(x) = x$.

c) $xy'' - y' + 4x^3 y = 0, \quad x > 0,\ y_1(x) = \sin(x^2)$.

Problema 5: Calcule la solución general de las siguientes ecuaciones

a) $x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0$.

b) $2x^2 y'' + (y')^3 = 2xy', \quad x > 0$.

c) $x^2 y'' = (y')^2, \quad x > 0$.

d) $yy'' + (y')^2 = 0$.

e) $2y^2 y'' + 2y(y')^2 = 1$.

f) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

Problema 6: Calcular la solución de los siguientes problemas de valores iniciales

a) $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

b) $y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

c) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 3x^{-2}, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -1$

d) $y'y'' - x = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 1$.

Problema 7: Considere la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

en el intervalo $a \leq x \leq b$. Suponga que se conocen dos soluciones, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, tales que

$$\begin{array}{ll} y_1(a) = 0 & y_2(a) \neq 0 \\ y_1(b) \neq 0 & y_2(b) = 0 \end{array}$$

Dé la solución de la ecuación:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)$$

que obedece las condiciones $y(a) = y(b) = 0$, en la forma:

$$y(x) = \int_a^b G(x, x')\, f(x')\, dx' \ ,$$

donde $G(x, x')$, la llamada función de Green, se construye sólo en términos de las soluciones y_1 y y_2 y asume diferentes formas funcionales para $x' < x$ y $x' > x$.

Ilustre este problema resolviendo:

$$y'' + k^2\, y = f(x); \quad y(a) = y(b) = 0$$

Problema 8: Hallar dos soluciones linealmente independientes, como series de potencias de x para las ecuaciones

a) $y'' - x^2 y = 0$

b) $y'' + x^3 y' + x^2 y = 0$

¿Para qué valores de x converge cada solución?

Problema 9: Calcule la solución de $(1 + x^2)y'' + y = 0$ como serie de potencias de x que satisface $y(0) = 0$, y $y'(0) = 1$.

Problema 10: La ecuación de *Chebyshev* es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0, \quad \alpha \text{ constante.}$$

a) Calcule dos soluciones en serie linealmente independientes válidas para $|x| < 1$.

b) Muestre que para todo entero no negativo $\alpha = n$ hay una solución polinómica de grado n. Normalizados apropiadamente, estas soluciones se conocen como "polinomios de Chebyshev."

Problema 11: Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

a) $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$

b) $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$

c) $x^2 y'' - 5xy' + 9y = x^3$

Problema 12: Muestre que $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares regulares para la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

Encuentre el polinomio indicial y sus raíces para el punto $x = 1$.

Problema 13: Considere la ecuación

$$x^2y'' + xe^xy' + y = 0.$$

a) Calcule el polinomio indicial y sus raíces.

b) Calcule los coeficientes $c_1,\ c_2,\ c_3$ de la solución

$$\phi(x) = |x|^i \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (c_0 = 1).$$

Problema 14: Obtenga dos soluciones linealmente independientes de las siguientes ecuaciones válidas alrededor de $x = 0$.

a) $x^2y'' + 5xy' + (3 - x^3)y = 0$

b) $x^2y'' - 2x^2y' + (4x - 2)y = 0$

Problema 15: Considere la ecuación de Bessel de orden cero

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

sabiendo que

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

es una solución, calcule la solución linealmente independiente $K_0(x)$ *(función de Bessel de segunda clase de orden cero).*

Problema 16: Muestre que $J_0'(x)$ satisface la ecuación de Bessel de orden 1

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

Problema 17: La *función Gamma* de variable compleja se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{z-1}dx, \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Pruebe que $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ y que $\Gamma(n + 1) = n!$ si n es natural.

Muestre que la solución regular en el origen (solución de primera clase) de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

es proporcional a

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

Problema 18: Considere la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad -\infty \leq x < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

a) Muestre que el factor integrante $p(x) = e^{-x^2}$ lleva esta ecuación a la forma de Sturm-Liouville.

b) Plantee una solución en serie de potencias para (1) y muestre que la solución para $\lambda = 2n$, que satisface las condiciones de contorno correctas, es un polinomio de grado n.