Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Primer parcial (22/09/2015) – Soluciones[1]

Problema 1: Usando la propiedad $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ de la función exponencial, exprese a $\cos(3x)$ (x real) en términos de $\cos(x)$ y $\mathrm{sen}(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) &= \exp(i3x) = (\exp(ix))^3 = (\cos(x) + i\sin(x))^3 \\ &= \cos(x)^3 + 3i\cos(x)^2\sin(x) - 3\sin(x)^2\cos(x) - i\sin(x)^3 \\ &= \cos(x)^3 - 3\sin(x)^2\cos(x) + \text{ parte imaginaria } ;\end{aligned}$$

Luego

$$\cos(3x) = \cos(x)^3 - 3\sin(x)^2\cos(x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x) \ .$$

Problema 2: Calcula todos los valores de $(-2)^{1+i}$ y determine los módulos correspondientes y los argumentos pricipales.

Solución: $(-2)^{1+i} = \exp[(1+i)\log(-2)] = \exp[(1+i)(\ln(2)+i\arg(-2))]$. Pero $\arg(-2) = \{\pi + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ de modo que

$$\begin{aligned}(-2)^{1+i} &= \exp[(1+i)(\ln(2) + i\pi + i2n\pi)] = \exp(\ln(2) - \pi - 2n\pi)\exp[i(\ln(2) + \pi + 2n\pi)] \\ &= 2e^{-(2n+1)\pi}\exp(i\ln(2))\exp(i\pi)\exp(i2n\pi) = -2e^{-(2n+1)\pi}(\cos(\ln(2) + i\sin(\ln(2)) \ .\end{aligned}$$

Los módulos correspondientes son $2e^{-(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$. Observe que hay módulos arbitrariamente grandes y arbitrariamente chicos. El argumento principal es uno sólo:

$$\mathrm{Arg}((-2)^{1+i}) = -\pi + \ln(2) \ .$$

Todos los valores de $(-2)^{1+i}$ caen en la semirecta $\{r\exp(i\pi + i\ln(2)) : r > 0\}$.

Problema 3: Determine una rama de $(4 + z^2)^{1/2}$ que este definida en todo el plano complejo sin el segmento de recta $[-2i, 2i]$.

Solución: Queremos definir una rama de esta raíz en el dominio $D := \mathbb{C} \setminus \{i2s : -1 \leq s \leq 1\}$ (abierto, conexo pero no simplemente conexo). Si usamos

$$(4 + z^2)^{1/2} = \exp\left\{\frac{1}{2}\log(4 + z^2)\right\}$$

necesitamos una rama de $\log(4 + z^2)$ definida en D. Ahora

$$\log(4 + z^2) = \log((z - 2i)(z + 2i)) = \log(z + 2i) + \log(z - 2i) \ .$$

Pero: no hay rama de $z \mapsto \log(z + 2i)$ definida en D ya que D contiene caminos cerrados que encierran a $-2i$ (por ejemplo un círculo de radio 17 alrededor de $z = 0$). Tampoco hay

[1] G.A.R.

rama de $z \mapsto \log(z-2i)$ definida en D porque D contiene caminos cerrados que encierran a $2i$.

Intentamos otra cosa via
$$(4+z^2) = z^2(1+(2/z)^2) \ .$$
Ahora, si definimos
$$w := z(1+(2/z)^2)^{1/2} = z\exp\left\{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{4}{z^2}\right)\right\}$$
con alguna rama del logaritmo, entonces $w^2 = 4+z^2$. Si tomamos –por ejemplo– el logaritmo principal entonces w está definido para todo $z \neq 0$ salvo aquellos para los cuales
$$1+\frac{4}{z^2} = -x \ , \ \ x \geq 0 \ .$$
Estos son los complejos $z \neq 0$ tales que
$$4/z^2 = -(x+1) \iff z^2 = -4/(1+x) \iff z = \pm 2i/\sqrt{x+1} \ ;$$
y estos son –junto con $z=0$– exactamente los $z \in [-2i, 2i]$. Por ende
$$D \ni z \mapsto f(z) := z\exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(1+\frac{4}{z^2}\right)\right\}$$
es una rama de las que se pedían. Hay otra más: $D \ni z \mapsto -f(z)$.

Problema 4: Determine una función $\phi(x,y)$ que sea armónica en el semiplano superior $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0\}$ y continua en el cierre de este semiplano tal que $\phi(x,0) = x^2+5x+1$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Si f es una función analítica en el semiplano complejo superior $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ que es abierto y conexo, entonces $u(x,y) := Re(f(x+iy))$ definida para $x \in \mathbb{R}$ y $y > 0$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y por las ec. de Cauchy-Riemann es armónica. Si $f(z) = z^2+5z+1$ entonces f es entera ya que $f'(z) = 2z+5$ de modo que
$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= Re(f(x+iy)) = Re\left\{(x+iy)^2+5(x+iy)+1\right\}\\ &= Re\left\{x^2-y^2+2ixy+5x+i5y+1\right\} = x^2-y^2+5x+1\end{aligned}$$
es armónica en todo el plano real y también $\phi(x,0) = x^2+5x+1$.

Problema 5: Estime el módulo de la integral
$$\int_{[0,i]} \exp(\mathrm{sen}(z))\, dz \ .$$

Solución: Tenemos $[0,i] = \{z(t) := ti : \ 0 \leq t \leq 1\}$ que tiene largo 1 de modo que
$$\left|\int_{[0,1]} \exp(\mathrm{sen}(z))\right| \leq \max_{z\in[0,i]}\{|\exp(\mathrm{sen}(z))|\} \ .$$

Pero si $z \in [0, i]$, $z(t) = ti$ con $0 \leq t \leq 1$; de modo que

$$\operatorname{sen}(z(t)) = (2i)^{-1}(\exp(-t) - \exp(t)) = i(e^t - e^{-t})/2 = i \sinh(t) ,$$

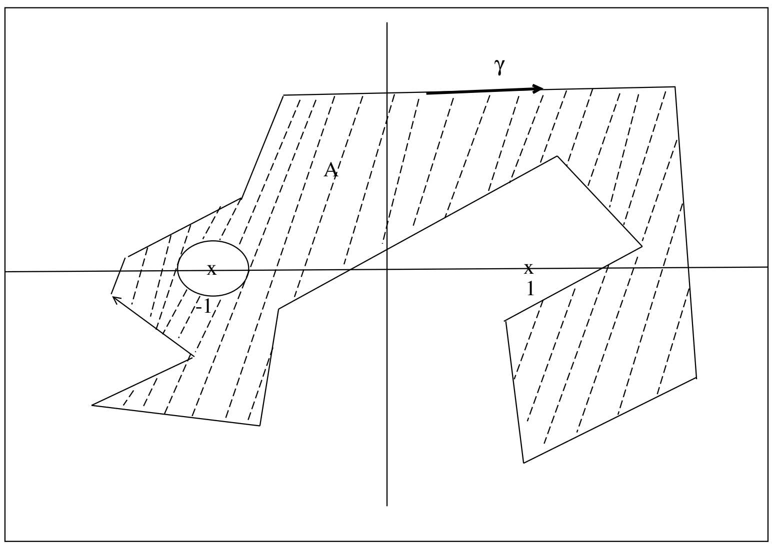
de donde

$$|\exp(\operatorname{sen}(z(t)))| = |\exp(i \sinh(t))| = 1 ,$$

ya que $\sinh(t)$ es real. Por lo tanto

$$\left| \int_{[0,1]} \exp(\operatorname{sen}(z)) \right| \leq 1 .$$

Problema 6: Evalue $\int_\gamma (1/(1-z^2))\, dz$ donde el camino cerrado es el de la figura.



Solución: Sea D el dominio encerrado por $[\gamma]$.

1^{era} *Variante*. Se tiene

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2(1-z)} + \frac{1}{2(1+z)} ,$$

$$\int_\gamma \frac{1}{1-z^2}\, dz = \frac{1}{2} \int_\gamma \frac{1}{1-z}\, dz + \frac{1}{2} \int_\gamma \frac{1}{1+z}\, dz ;$$

la primera integral se anula pues el integrando es analítico en D (la derivada del integrando es $1/(1-z)^2$). Considere una circunferencia orientada negativamente $C^-(-1, r)$ centrada en $z = -1$ de radio r tan chico que el disco cerrado $\overline{D(-1, r)}$ "quepa" en el dominio encerrado por $[\gamma]$. Entonces

$$\frac{1}{2} \int_\gamma \frac{1}{1+z}\, dz = \frac{1}{2} \int_{C^-(-1,r)} \frac{1}{1+z}\, dz ,$$

ya que la función $z \mapsto 1/(1+z)$ es analítica (la derivada es $-1/(1+z)^2$) en el dominio A delimitado por $[\gamma]$ y $[C^-(-1,r)]$. Ahora

$$C^-(-1,r) = \{z(t) := -1 + r\exp(it) : 2\pi \geq t \geq 0\} ,$$

de modo que

$$\int_{C^-(-1,r)} \frac{1}{1+z}\, dz = ri \int_{2\pi}^{0} \frac{\exp(it)}{r\exp(it)} dt = -2\pi i ,$$

y por ende

$$\int_\gamma (1/(1-z^2))\, dz = -i\pi .$$

2^{da} *Variante*. Sea $f(z) := 1/(1-z)$ que es analítica fuera de $z = 1$. Ya que $\frac{1}{1-z^2} = f(z)/(z+1)$ y γ tiene orientación negativa, la fórmula de Cauchy nos dice que

$$f(-1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} \frac{f(z)}{(z-(-1))}\, dz ;$$

por lo tanto

$$\int_\gamma \frac{1}{1-z^2}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z+1}\, dz = -2\pi i f(-1) = -\pi i .$$