Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Segundo parcial (18/10/2016): Soluciónes[1]

.

Problema 1: Encontrar y clasificar las singularidades de $\exp(\tan(1/z))$. ¿Es $z = 0$ una singularidad aislada?

Solución: $z = 0$ es una singularidad. Ya que exp es entera y $\tan(z) = \operatorname{sen}(z)/\cos(z)$ hay que determinar los ceros del coseno. Estos son los w con $\exp(iw) + \exp(-iw) = 0$ o sea, $\exp(2iw) + 1 = 0$, vale decir $\exp(2iw) = -1 = \exp(i\pi + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$, de modo que $w = w_k := (2k+1)\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$. Con esto, las singularidades de $\exp(\tan(1/z))$ son $z = 0$ y $z_k = 1/w_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Como $|z_k| = (2/\pi)|2k+1|^{-1}$ todo entorno de 0 contiene infinitos z_k de modo que la singularidad 0 no es aislada.
Las demás singularidades z_k, $k \in \mathbb{Z}$, son aisladas. Consideremos $z_o = 2/\pi$ para explorar que tipo de singularidades son estas z_k; si $z(t) = 1/(w_o + t)$ con t real y chico pero no cero, entonces con las fórmulas de adición de ángulos

$$\exp(\tan(1/z(t))) = \exp(\tan(w_o + t))$$

$$= \exp\left(\frac{\operatorname{sen}(w_o)\cos(t) + \cos(w_o)\operatorname{sen}(t)}{\cos(w_o)\cos(t) - \operatorname{sen}(w_o)\operatorname{sen}(t)}\right) = \exp\left(-\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}\right) \ ;$$

luego

$$\lim_{t\to 0^\pm} |\exp(\tan(1/z(t)))| = \lim_{t\to 0^\pm} \exp(-\cos(t)/\operatorname{sen}(t)) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } t \to 0^+ \\ +\infty & , \quad \text{si } t \to 0^- \end{cases}$$

Pero ya que $\lim_{t\to 0} z(t) = z_o$, esto verifica que z_o es una singularidad esencial. Observando que $z \mapsto \tan(z)$ es π-periódica, vemos que el análisis hecho para z_o puede repetirse para $z_k = z_o + k\pi$ y esto verifica que z_k es singularidad esencial para todo $k \in \mathbb{Z}$.
Comentario extra: con $z(t) = 1/(w_o + it)$ con t real no nulo obtenemos (de manera análoga usando fórmulas de adición de ángulos)

$$\exp(\tan(1/z(t))) = \exp(i\cosh(t)/\sinh(t)) \ ,$$

y por ende

$$\lim_{t\to 0} |\exp(\tan(1/z(t)))| = 1 \ .$$

Nuevamente $\lim_{t\to 0} z(t) = z_0$.

Problema 2: Sea

$$f(z) = \frac{(z^2-1)\,(z-i)}{(1+z^2)\,\sin^2(\pi z)}$$

a) Determine y clasifique todos los ceros y las singularidades de $f(z)$.

b) Calcule la *parte principal* del desarrollo de Laurent de $f(z)$, centrado en $z_0 = 0$, que converge alrededor de z_0.

Solución: Reescribo

$$f(z) = \frac{(z-1)(z+1)(z-i)}{(z-i)(z+i)\operatorname{sen}(\pi z)^2} \ .$$

[1] G.A.R.

a) $z = i$ es singularidad removible y redefinimos

$$f(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z+i)\,\mathrm{sen}(\pi z)^2} \ .$$

Los candidatos a ceros de f son entonces ± 1. Las singularidades son $z = -i$ y los ceros de $\mathrm{sen}(\pi z)$. Estos últimos son (haga el cálculo como en el Problema 1) $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, que son simples pero ceros dobles de $z \mapsto \mathrm{sen}(\pi z)^2$. Los ceros $z = \pm 1$ del numerador se cancelan parcialmente con los ceros dobles $z = \pm 1$ del denominador por lo cual:

$$z_{\pm 1} := \pm 1 \ , \quad \zeta = -i \quad \text{son polos simples de } f \ .$$

¡Y f no tiene ceros! Por último,

$$z_k := k \ , \ k \in \mathbb{Z} \ , \ k \neq \pm 1 \ \text{ son polos dobles de } f \ .$$

b) Ya que $z_o = 0$ es polo doble de f la parte principal de f alrededor de z_o es:

$$a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} \ .$$

Para determinar los coeficientes hay varias variantes. Por ejemplo:

$$a_{-2} = \lim_{z \to 0} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2(z^2-1)}{(z+i)\,\mathrm{sen}(\pi z)^2}$$

que con dos aplicaciones sucesivas de la regla de l'Hôpital se calcula a

$$a_{-2} = i/\pi^2 \ .$$

Luego se determina a_{-1} usando el límite de $z(f(z) - a_{-2}/z^2)$ para $z \to 0$.
Más inmediato es partir de la identidad

$$(a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)(z+i)\,\mathrm{sen}(\pi z)^2 = z^2 - 1 \ ;$$

luego calcular el comienzo de la serie de Taylor de $z \mapsto \mathrm{sen}(\pi z)^2$ alrededor de z_o

$$\mathrm{sen}(\pi z)^2 = \pi^2 z^2 + \mathcal{O}(z^4) \ ;$$

y entonces

$$z^2 - 1 = [a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n]\,(z+i)\,(\pi^2 z^2 + \mathcal{O}(z^4))$$

$$= [i\pi^2 z^2 + \pi^2 z^3 + \mathcal{O}(z^4)]\,[a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} + \mathcal{O}(1)] = i\pi^2 a_{-2} + i\pi^2 a_{-1} z + \pi^2 a_{-2} z + \mathcal{O}(z^2) \ ;$$

de donde obtenemos

$$a_{-2} = i/\pi^2 \ , \ \ a_{-1} = i a_{-2} = -1/\pi^2 \ .$$

Para obtener el coeficiente a_o tendremos que incluir el coeficiente de z^4 en la serie de $\mathrm{sen}(\pi z)^2$; etc. etc.

Problema 3: Evalue $\int_C \exp(1/z)\ \mathrm{sen}(1/z)\, dz$ donde C es el círculo de radio 1 centrado en 0 y orientado positivamente.

Solución: Tanto la exponencial como el seno son funciones enteras y por ello las conocidas series infinitas

$$\exp(1/z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!z^n} \ , \ \ \operatorname{sen}(1/z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}$$

convergen si $z \neq 0$ y lo hacen uniformemente para $|z| > r$ donde $r > 0$ es arbitrario. Por lo tanto,

$$\exp(1/z)\operatorname{sen}(1/z) = \sum_{n\in\mathbb{N}\ ,\ k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{n!(2k+1)!z^{n+2k+1}} \ .$$

Por la convergencia uniforme mencionada (tome $r = 1/2$ para fijar las cosas y permutar la suma con la integral)

$$\int_C \exp(1/z)\operatorname{sen}(1/z)\, dz = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{n!(2k+1)!} \int_C \frac{1}{z^{n+2k+1}}\, dz \ ;$$

los integrandos con $n + 2k + 1 \neq 1$ tienen primitiva y la integral correspondiente se anula –el único sumando que no se anula es aquel con $n + 2k + 1 = 1$ o sea $n = k = 0$ y la integral concomitante es (por la fórmula de Cauchy) $2\pi i$. Por lo tanto

$$\int_C \exp(1/z)\operatorname{sen}(1/z)\, dz = \frac{(-1)^0}{0!1!}(2\pi i) = 2\pi i \ .$$

Problema 4:

a) Muestre que si f tiene un polo de orden m en z_0 entonces $g(z) := f'(z)/f(z)$ también tiene un polo en z_o.¿De que orden y cuál es el residuo correspondiente?

b) Muestre que si f tiene un cero de orden n en z_0 entonces $g(z) := f'(z)/f(z)$ tiene un polo simple. ¿Cual es el residuo correspondiente?

c) Suponga que f es analítica en un dominio simplemente conexo D salvo en finitas singularidades aisladas que son polos. Considere un camino cerrado simple orientado positivamente Γ en D que no pasa por ninguna singularidad de f. ¿Que puede decir sobre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \quad ?$$

Solución:

a) $f(z) = h(z)/(z - z_o)^m$ con $m \geq 1$, h analítica en z_o y no nula allí. Entonces $f'(z) = h'(z)/(z - z_o)^m - mh(z)/(z - z_o)^{m+1}$ y

$$g(z) := f'(z)/f(z) = -\frac{m}{z - z_o} + h'(z)/h(z) \ .$$

Ya que tanto h como h' son analíticas en z_o y $h(z_o) \neq 0$, $z \mapsto h'(z)/h(z)$ es analítica en z_o y por ende z_o es polo simple de g y el residuo asociado es $Res(g, z_o) = -m$ o sea menos el orden del polo de f[2]

[2]Con $\epsilon > 0$ lo suficientemente chico

$$Res(g, z_o) = (1/2\pi i)\int_{C(z_0,\epsilon)} (-m/(z - z_o))\, dz + (1/2\pi i)\int_{C(z_o,\epsilon)} (h'(z)/h(z))dz = -m$$

pues $h'(z)/h(z)$ es analítica en z_o de donde $\int_{C(z_o,\epsilon)}(h'(z)/h(z))dz = 0$.

b) $f(z) = h(z)(z - z_o)^n$ con $n \geq 1$, h analítica en z_o y no nula allí. Entonces $f'(z) = h'(z)(z - z_o)^n + nh(z)(z - z_o)^{n-1}$ y

$$g(z) := f'(z)/f(z) = \frac{n}{z - z_o} + h'(z)/h(z) \ .$$

Por el mismisimo motivo que en a), z_o es polo simple de g y el residuo asociado es $Res(g, z_o) = n$ o sea el orden del cero de f.

c) Suponemos que f no es identicamente nula. Dado Γ como se pide, sean ζ_j, $j = 1, 2, \cdots, P$, los finitos ceros aislados de f que caen dentro del dominio interior asociado con Γ. Sean n_j el orden del cero ζ_j.
Sean z_k, $k = 1, 2, \cdots, Q$, los finitos polos de f que caen dentro del dominio interior a Γ y m_k el orden correspondiente. Entonces, por a) y b) la función $g(z) = f'(z)/f(z)$ tiene unicamente polos simples en $\{\zeta_j : j = 1, 2, \cdots, P\}$ y en $\{z_k : k = 1, 2, \cdots, Q\}$ con residuos $Res(g, \zeta_j) = n_j$ y $Res(g, z_k) = -m_k$. Por el Teorema de los Residuos

$$(1/2\pi i) \int_\Gamma g(z)\, dz = \sum_{j=1}^{P} Res(g, \zeta_j) + \sum_{k=1}^{Q} Res(g, z_k) = \sum_{j=1}^{P} n_j - \sum_{k=1}^{Q} m_k \ .$$

Este es el famoso y hermoso Principio del Argumento que dice: *Si f es analítica salvo en un número finito de polos entonces la integral de f'/f sobre un camino cerrado simple orientado positivamente –que no pasa por polos de f– es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos encerrados por Γ si tenemos en cuenta la multiplicidad de esos ceros y polos al contarlos.*

Problema 5: Determine una función $\phi(x, y)$ que sea armónica en el semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y continua en el cierre de este semiplano tal que $\phi(x, 0) = 2x^3/(x^2+4)$ para $x \in \mathbb{R}$.
Sugerencia: $2x^3/(x^2 + 4) = 2\mathrm{Re}(x^2/(x + 2i))$.

<u>Solución</u>: La función $g(z) = 2z^3/(z^2 + 4)$ tiene un polo simple en $2i$ y no es analítica en todo el semiplano superior. Pero la sugerencia propone

$$f(z) = 2z^2/(z + 2i) \ ,$$

que es analítica en todo $\mathbb{C}$ salvo en el polo simple $-2i$ (que está en el semiplano inferior). Pero entonces, $\phi(x, y) := \mathrm{Re}(f(x + iy))$ es una función armónica en todo el semiplano superior (y mucho más). Tenemos después de un cálculo directo

$$\phi(x + iy) = 2\frac{x^3 + xy^2 + 4xy}{x^2 + (y + 2)^2} \ ;$$

y efectivamente $\phi(x, 0) = 2x^3/(x^2 + 4)$.