Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 8 (2016); Problema 5b)[1]

Problema 5b) Demuestre que si

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es una ecuación homogénea, entonces uno de sus factores integrantes es

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x\,M(x,y) + y\,N(x,y)}.$$

Aplique este resultado para resolver las ecuaciones 2 y 3 del problema 5.a).

La terminología "homogénea" es confusa. Lo que se pide es lo siguiente: si tanto M como N son funciones homogeneas del mismo grado entonces μ es un factor integrante.

Recuerde que si tanto M como N son funciones homgéneas del mismo grado α; o sea:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha M(x,y)\ ,\quad N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha N(x,y)$$

para todo $\lambda \neq 0$, entonces (derivando estas relaciones con respecto a λ y luego tomando $\lambda = 1$) se tienen las relaciones de Euler:

$$\alpha M(x,y) = x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial M}{\partial x}\ ,\quad \alpha N(x,y) = x\frac{\partial N}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial x}\ .$$

Observese que si M y N son homogéneas del mismo grado entonces la ED $y' = -(M/N)$ es homogénea.

La ec. diferencial que debe cumplir μ para ser un factor integrante es (vea las notas):

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu = 0\ .$$

Ahora, con $\mu = (xM + yN)^{-1}$,

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\mu^2\left((M + x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial x}\right)\ ,\quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = -\mu^2\left((N + y\frac{\partial N}{\partial y} + x\frac{\partial M}{\partial x}\right)\ .$$

Insertando esto en la ec. diferencial y usando la notación abreviada $\partial F/\partial t = F_t$,

$$-M\mu^2(N + yN_y + xM_y) + N\mu^2(M + xM_x + yN_x) - \mu(M_y - N_x)$$
$$= \mu^2\left\{-MN - yMN_y - xMM_y + NM + xNM_x + yNN_x + (xM + yN)(M_y - N_x)\right\}$$
$$= \mu^2\left\{-yMN_y - xMM_y + xNM_x + yNN_x + xMM_y - xMN_x + yNM_y - yNN_x\right\}$$
$$= \mu^2\left\{-yMN_y + xNM_x - xMN_x + yNM_y\right\} = \mu^2\left\{-M(yN_y + xN_x) + N(xM_x + yM_y)\right\}$$
$$= \mu^2\left\{-M\alpha N + N\alpha M\right\} = 0\ .$$

En el último paso hemos usado las relaciones de Euler.
Esto comprueba que μ es factor integrante. La aplicación pedida es inmediata.

[1] GAR