Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 8 (2016); Problema 2b)[1]

Problema 2b) $dy/dx = 1/(e^y - x)$, $y(1) = 0$
Ayuda: Considere a y como variable independiente en vez de x.

El problema presenta una serie de aspectos (metodológicos y otros) interesantes.

La ED es

$$y' = \frac{1}{e^y - x} \; . \tag{1}$$

Es notable que si $y(1) = 0$ entonces $e^{y(1)} - 1 = 0$ y la función buscada ¡no tiene derivada en $x = 1$! En particular, el Teorema de Existencia y Unicidad local no se aplica en $(1, 0)$. Podemos esperar cosas.

a) *Lo que se pedía:* Si la función buscada y es invertible y la inversa es diferenciable en las inmediaciones[2] de $x = 1$ denotamos su inversa por ξ y la derivada de ξ es $\xi'(t) = 1/(y'(\xi(t))) = e^t - \xi(t)$ o sea tenemos la ED

$$\xi' = e^t - \xi \tag{2}$$

con la condición

$$\xi(0) = 1 \; . \tag{3}$$

Aunque en el punto $(y = 0, \xi = 1)$ no se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Inversa.

La ED (2) es de solución inmediata ya que es lineal inhomogenea. Una solución particular es inmediata $\xi_c(x) = e^t/2$. La solución de la ED lineal homogenea asociada es $\xi_o(x) = \lambda e^{-t}$. Por lo tanto:

$$\xi(t) = \lambda e^{-t} + e^t/2 \tag{4}$$

es la solución general de (2). La condición de Cauchy (3) impone $\lambda = 1/2$, vale decir

$$\xi(t) = \cosh(t) \; .$$

La función cosh es par, positiva con $\cosh(t) \geq 1$ con igualdad si y sólo si $t = 1$; es convexa y monótona creciente (respectivamente, decreciente) en el intervalo $[0, \infty)$ (respectivamente, $(-\infty, 0]$). ¡Haga el gráfico! La función inversa no está definida pero se conviene llamar arcosh a la inversa de la función $[0, \infty) \ni t \mapsto \cosh(t)$. Se tiene $\mathrm{arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ y

$$\mathrm{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \; , \;\; 1 \leq x \; .$$

Claramente $-\,\mathrm{arcosh}$ es la inversa de $(-\infty, 0] \ni t \mapsto \cosh(t)$ ya que $\cosh(-\,\mathrm{arcosh}(x)) = \cosh(\mathrm{arcosh}(x)) = x$ para todo $x \in [1, \infty)$.

[1]GAR

[2]Por ejemplo en un intervalo abierto que contiene a 1; en un intervalo $(1, a)$ con $a > 1$ o bien en un intervalo $(a, 1)$ con $a < 1$.

Entonces tomando cualquiera de las dos inversas del cosh obtenemos las siguientes soluciones de la ED dada[3]

$$y_{\pm}(x) = \pm\,\mathrm{arcosh}(x)\ ,\quad x \geq 1$$

y tenemos $y_{\pm}(1) = 0$ de modo que el problema de Cauchy planteado tiene dos (a lo menos) soluciones.

b) Generalización: Lo hecho puede generalizarse. Cualquiera sea $x_o > 0$, el problema de Cauchy

$$y' = 1/(e^y - x)\ ,\quad y(x_o) = \ln(x_o) \tag{5}$$

tiene –a lo menos– dos soluciones. Esto se obtiene procediendo como en el caso recién visto $x_o = 1$, la condición de Cauchy para la solución general (4) es ahora $\xi(\ln(x_o)) = x_o$ lo que determina la constante a $\lambda = x_o^2/2$ y entonces

$$\xi(t) = \frac{e^{-t}}{2}\left(x_o^2 + e^{2t}\right)\ . \tag{6}$$

Esta función es positiva tiene un mínimo absoluto en $t_o := \ln(x_o)$ con $\xi(t_o) = x_o$ y es creciente (resp. decreciente) en el intervalo $[t_o, \infty)$ (resp. en el intervalo $(-\infty, t_o]$. Tomando las inversas en cada uno de los dos intervalos de monotonía obtenemos las dos soluciones de (5) válidas en $[x_o, \infty)$. La inversión puede explicitarse y esto se hace en el próximo apartado.

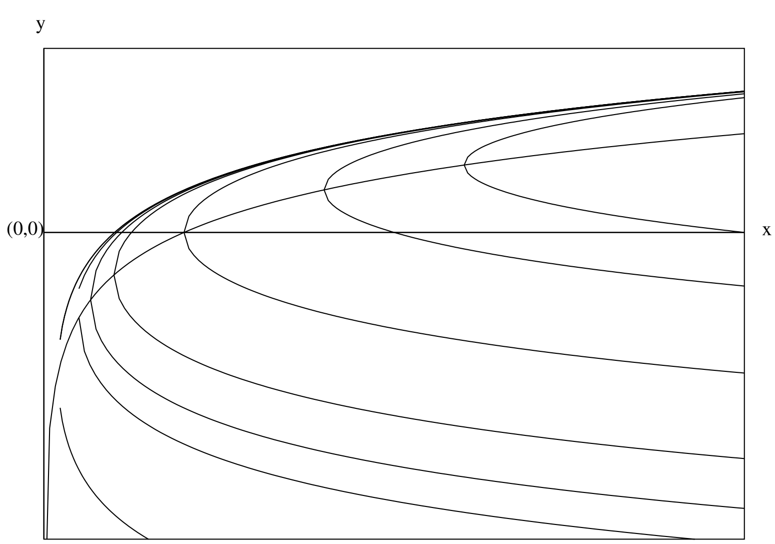

Figura 1: Curvas integrales para las cuales $y(x_o) = \ln(x_o)$ con $x_o > 0$. La curva $0 < x \mapsto \ln(x)$ no es curva integral se agrega sólo para facilitar la visión.

c) Más soluciones por el mismo método: Seguimos con la ED (2) y recordamos la solución $\xi_c(t) = e^t/2$. Esta es claramente invertible y obtenemos la solución

$$y_c(x) = \ln(2x)\ ,\quad x > 0$$

[3] De más está decir que una derivación directa de $y_{\pm}$ verifica esto.

válida en $(0,\infty)$.
Si consideramos una condición de Cauchy $y(x_o)=y_o$ general, la condición de Cauchy para (2) es $\xi(y_o)=x_o$. Esto determina la constante λ de (4) y entrega

$$\xi(t)=\frac{e^{y_o-t}(2x_o-e^{y_o})+e^t}{2}\ ,$$

como solución. La función $\mathbb{R}\ni t\mapsto \xi(t)$ tiene puntos críticos en las soluciones de $0=\xi'(t)=e^t-\xi(t)$ o sea en las raices de

$$e^t=\xi(t)\quad\Longleftrightarrow\quad e^{2t}=e^{y_o}(2x_o-e^{y_o})\ ;$$

si $2x_o-e^{y_o}\le 0$ no hay raíz ya que la exponencial es siempre estrictamente positiva; en caso contrario hay una única raiz

$$y_1:=\frac{y_o+\ln(2x_o-e^{y_o})}{2}\ ,\ \ x_o>0\ ,\ \ y_c(x_o)=\ln(2x_o)<y_o\ .$$

Ya que

$$\lim_{t\to\infty}\xi(t)=\infty\ ,\quad \lim_{t\to-\infty}\xi(t)=\begin{cases}-\infty & ,\quad \text{si } 2x_o<e^{y_o}\\ 0 & ,\quad \text{si } y_o=y_c(x_o)=\ln(2x_o)\\ +\infty & ,\quad \text{si } 2x_o>e^{y_o}\end{cases}\ ,$$

deducimos que $t\mapsto\xi(t)$ es estrictamente creciente si $x_o\le 0$ o bien $x_o>0$ pero $y_o\ge y_c(x_o)$, y obtenemos por inversión una solución $y(x)$ del problema de Cauchy original que esta definida para todo x real.
De los límites también deducimos que cuando hay un punto crítico y_1 como este es único, la función ξ es estrictamente decreciente en $(-\infty,y_1]$ y estrictamente creciente en $[y_1,\infty)$ siendo y_1 un mínimo absoluto $\xi(t)\ge\xi(y_1)$ con igualdad si y sólo si $t=y_1$. En particular $x_o=\xi(y_o)>\xi(y_1)$. Calculamos inmediatamente

$$\xi(y_1)=2e^{y_o}\sqrt{2x_o-e^{y_o}}\ .$$

Las inversiones respectivas definen dos soluciones del problema de Cauchy original en el intervalo $(\xi(y_1),\infty)$ que contiene a x_o.
Las inversiones pueden explicitarse como sigue. Poniendo $z(y)=e^y$, y

$$\gamma_o:=e^{y_o}(2x_o-e^{y_o})\ ;$$

$$x=\xi(y)=\frac{e^{y_o-y}(2x_o-e^{y_o})+e^y}{2}$$

equivale a

$$2x=\frac{e^{y_o}(2x_o-e^{y_o})}{z}+z\quad\Longleftrightarrow\quad z^2-2xz+\gamma_o=0\ ,$$

de modo que $z=z(x)$ es una raíz positiva de la ec. cuadrática. Las raices son

$$z_\pm:=x\pm\sqrt{x^2-\gamma_o}\ .$$

Si $\gamma_o\le 0$ que equivale a $2x_o\le e^{y_o}$ o sea $y_o\ge y_c(x_o)$, ambas raices son reales pero unicamente la raíz

$$z_+(x)=x+\sqrt{x^2+|\gamma_o|}$$

es positiva para todo $x\in\mathbb{R}$ cuando $\gamma_o<0$ y cuando $\gamma_o=0$,

$$z_+(x)=\begin{cases}2x & ,\quad x\ge 0\\ 0 & ,\quad x<0\end{cases}\ .$$

Obtenemos asi la solución

$$y_o(x) := \ln(z_+(x)) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + |\gamma_o|}\right) \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

cuando $\gamma_o < 0$. Y también la solución y_c ya identificada pero válida solamente para $x > 0$.
Si $\gamma_o > 0$ o sea $2x_o > e^{y_o} > 0$, ambas raices son positivas para $x \geq \sqrt{\gamma_o} > 0$ y no hay raices positivas para $x < \sqrt{\gamma_o}$. Esto es consecuencia de que $z_\pm(x)$ no son reales para $|x| < \sqrt{\gamma_o}$ y que ambas raices son no-positivas cuando se cumple $x \leq -\sqrt{\gamma_o}$. En resumen las soluciones al problema de Cauchy encontradas son:

$$y(x) = \begin{cases} y_o(x) & , \quad \text{para todo } x \text{ real cuando } y_o > y_c(x_o) \\ y_c(x) = \ln(2x) & , \quad \text{para todo } x > 0 \text{ cuando } y_o = y_c(x_o) \\ \eta_\pm(x) := \ln(x \pm \sqrt{x^2 - |\gamma_o|}) & , \quad \text{para } x > \sqrt{\gamma_o} \text{ cuando } y_o < y_c(x_o) \end{cases}$$

Observese que cuando $y_o = \ln(x_o)$ tendremos $\gamma_o = x_o^2$ y obtenemos las inversiones de (6) a

$$\eta_\pm(x) := \ln(x \pm \sqrt{x^2 - x_o^2}) \ , \ \ x > x_o > 0 \ , \ \ y_o = \ln(x_o) \ .$$

La figura 2 muestra las curvas integrales de la ED (2) y la figura 3 aquellas de la ED original. En la figura 3, la curva $0 < x \mapsto \ln(x)$ es el conjunto de puntos (x_o, y_o) que cumplen $e^{y_o} = x_o$ y solamente en estos puntos hay dos soluciones.

Para completar: para ver que estas son absolutamente todas las curvas integrales de (1) basta ver que cubren todo $\mathbb{R}^2$ y que en cada punto de la curva $y(x) = \ln(x)$ no hay otras soluciones salvo las dos ya encontaradas. Esto se desprende del teorema de unicidad local.

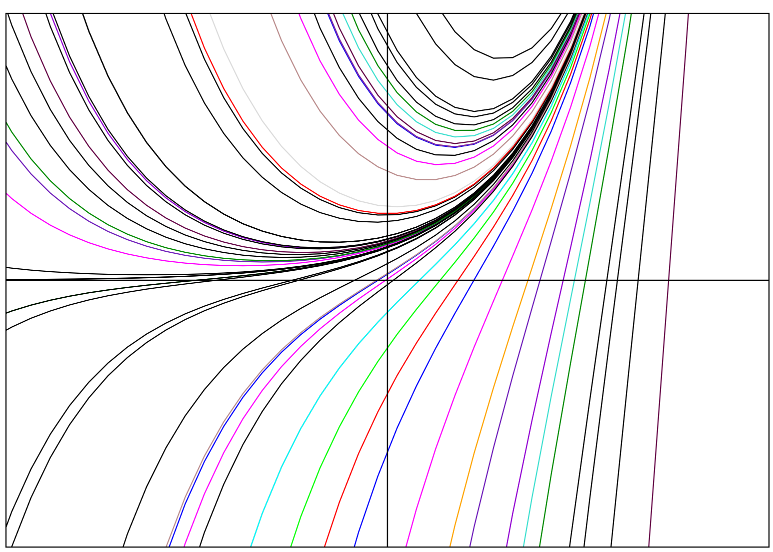

Figura 2: Curvas integrales para $\xi' = e^t - \xi$. La curva crítica es $z_c(x) = e^t/2$ y todas las demás curvas integrales "fluyen" hacia ella cuando $t \to \infty$. Por cada punto del plano pasa una y sólo una curva integral; el problema de Cauchy tiene solución única siempre.

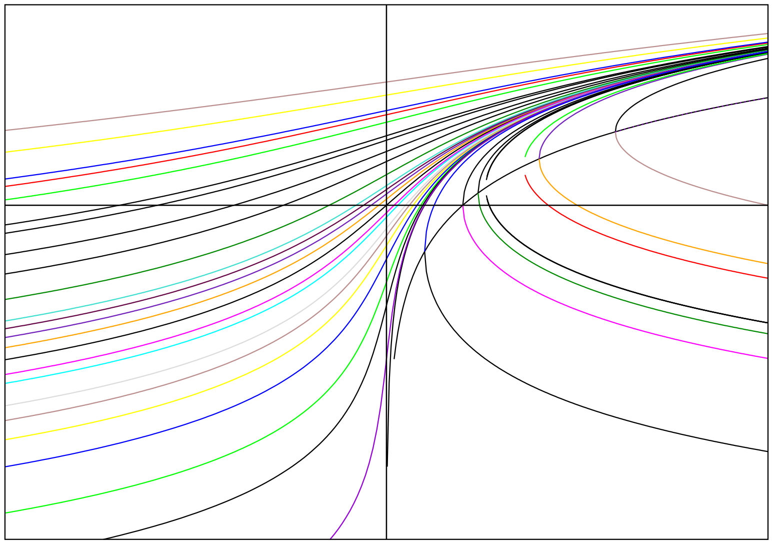

Figura 3: Curvas integrales para $y' = 1/(e^y - x)$. La curva $0 < x \mapsto \ln(x)$, $x > 0$ (que no es integral), comprende todos los puntos donde el problema de Cauchy tiene dos soluciones y esta curva separa al plano (tomese $y_c(x) = -\infty$ para $x \leq 0$) en dos regiones donde el problema de Cauchy tiene solución única. En la región superior las curvas son crecientes y $y(x) \asymp \ln(2x)$ para $x \to \infty$. En la región inferior, las curvas son decrecientes y $y(x) = -\ln(2x) + O(1)$ para $x \to \infty$.

d) Otro método de solución: Con $z = e^y$ la ED (1) se transforma en

$$z' = e^y y' = e^y/(e^y - x) = z/(z - x) \ ,$$

que es una ED homogenea. La transformación es entonces $u = z/x$ o sea $z = xu$ con lo cual

$$\frac{u}{u-1} = \frac{ux}{ux - x} = z' = (xu)' = u + xu'$$

o bien

$$u' = \frac{u(2-u)}{x(u-1)}$$

que es separable. Esto impone las condiciones $x \neq 0$ y $u \neq 1$. Claramente $u_o(x) := 0$ y $u_2(x) := 2$ son soluciones para todo $x \neq 0$. Con $\phi(u) := u(2-u)$ se tiene

$$u' = -2\frac{\phi(u)}{x\phi'(u)} \iff \frac{-\phi'(u)}{2\phi(u)}\, du = dx/x$$

que integrado da

$$\frac{-1}{2} \ln|u(2-u)| = \ln|x| + \alpha \iff |u(2-u)| = C/x^2 \ .$$

Esto tiene sentido si $x \neq 0$. La condición de Cauchy para (1) $y(x_o) = y_0$ se transforma en $u(x_o) = e^{y_o}/x_o$ y esto determina el valor de C a

$$e^{y_o}|2x_o - e^{y_o}| = |\gamma_o| \ .$$

Ahora si $u < 0$ tenemos $|u(2-u)| = |u|\,|2+|u|\,| = -u(2-u) = u^2 - 2u$ de modo que $|u(2-u)| = C/x^2$ equivale a

$$u = u_-(x) := 1 - \sqrt{1 + |\gamma_o|/x^2}\ .$$

Si $u > 2$ entonces $|u(2-u)| = u(u-2)$ con lo cual u está dado por

$$u = u_+(x) := 1 + \sqrt{1 + |\gamma_o|/x^2}\ .$$

Mientras que si $0 \le u \le 2$, $|u(2-u)| = u(2-u) = 2u - u^2$ y hay dos valores posibles

$$u = \mu_\pm(x) := 1 \pm \sqrt{1 - |\gamma_o|/x^2}\ ,\ \ |x| \ge \sqrt{|\gamma_o|}\ .$$

Esto se desprende de $0 < \mu_-(x) \le \mu_+(x) < 2$. Observese que $\mu_+(x) = \mu_-(x)$ corresponde al valor $u = 1$ donde la ED para u deja de tener sentido.
Ahora, deshaciendo camino, determinamos las soluciones positivas para $z = ux$. Estas son:

1) Si $x < 0$ necesariamente $u < 0$ y entonces

$$z_+(x) = xu_-(x) = x - x\sqrt{1 + |\gamma_o|/x^2} = x + \sqrt{x^2 + |\gamma_o|}\ ,\ \ x < 0\ .$$

Esto corresponde a la solución z_+ del apartado anterior pero para $x < 0$.

2) Si $x > 0$ entonces $u > 0$ obtenemos las dos soluciones

$$z(x) = x \pm x\sqrt{1 - |\gamma_o|/x^2} = x \pm \sqrt{x^2 - |\gamma_o|}\ ,\ \ x > |\gamma_o| > 0\ .$$

Y también la solución (correspondiente a $u > 2$)

$$z_+(x) = xu_+(x) = x + \sqrt{x^2 + |\gamma_o|}\ ,\ \ x > 0\ ,$$

que empalma con $z_+(x)$ para $x < 0$ de manera continua y dieferenciable en $x = 0$.

3) La solución u_o no conduce a nada mientras que la solución u_2 conduce a $z_c(x) = 2x$ para $x > 0$.

Con esto hemos llegado al mismo lugar que en el apartado anterior.