Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – 2016

Determinación del argumento principal

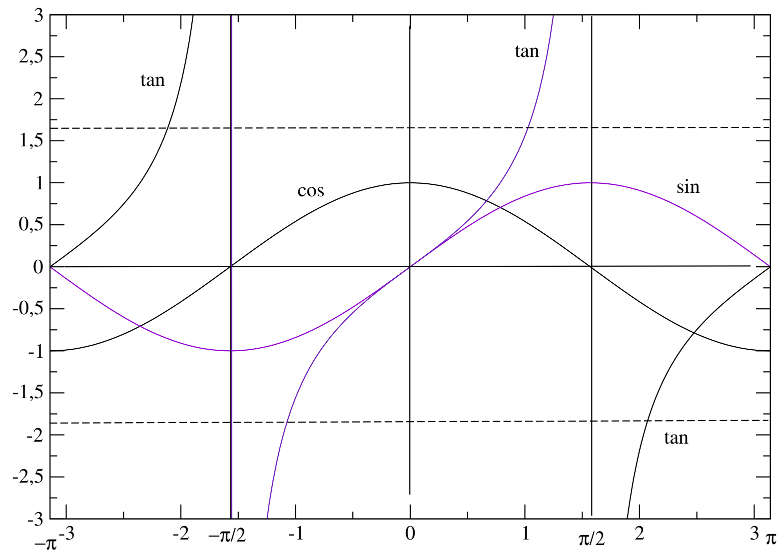

Figura 1: Las funciones sin, cos y tan en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Las lineas horizontales punteadas indican que cualquiera sea el real u, hay dos soluciones x de $\tan(x) = u$ en el intervalo $(-\pi, \pi]$.

Recordamos que un número real α es un **argumento** del número complejo $z = x + iy$ no nulo si

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{Re(z)}{|z|}\ , \ \ \sin(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{Im(z)}{|z|}\ .$$

En cada intervalo de la forma $(a, 2\pi + a]$ hay exactamente un argumento de cada número complejo no nulo[1]. El **argumento principal** de $z \neq 0$ anotado Arg es el argumento que cae en el intervalo $(-\pi, \pi]$. La figura muestra que a medida que z va girando alrededor de 0 recorriendo los cuadrantes (van cambiando los signos de sus partes real e imaginaria), el Arg va recorriendo el intervalo $(-\pi, \pi]$ asi:

- Si $x < 0$ y $y < 0$ entonces $-\pi < \text{Arg}(z) < -\pi/2$;
- Si $x \geq 0$ y $y < 0$ entonces $-\pi/2 \leq \text{Arg}(z) < 0$;

[1] Una posible demostración es la que sigue basada en:
Lema: En el intervalo $(a, a + 2\pi]$ *la ecuación* $\cos(u) = t$ *con* $-1 < t < 1$ *tiene dos soluciones* $u_1 < u_2$ *y* $\sin(u_1) = -\sin(u_2)$ $(\neq 0)$*. Los valores extremos* ± 1 *se asumen exactamente una sola vez.*
La demostración queda por su cuenta; basta darla en su intervalo de largo 2π preferido y trasladar. Use, por ejemplo, que la distancia entre ceros sucesivos del coseno (o del seno) es π y que estos se entrelazan con los ceros del seno a distancia $\pi/2$; y combine con que $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ y que el seno es menos la derivada del coseno.

Ahora, dado este lema, si $y = 0$ entonces $x \neq 0$ y $\cos(\alpha) = x/|x|$ que es 1 para $x > 0$ y es -1 en el otro caso; α está univocamente determinado. Si $y \neq 0$ entonces $|x/\sqrt{x^2+y^2}| < 1$ de modo que hay exactamente dos valores $\alpha_\pm$ tales que $\cos(\alpha_\pm) = x/\sqrt{x^2+y^2}$; ya que $|\sin(\alpha_\pm)| = \sqrt{1-\cos(\alpha_\pm)^2} = |y|/\sqrt{x^2+y^2}$, y que $\sin(\alpha_+) = -\sin(\alpha_-)$, necesariamente uno –y sólo uno– de estos dos valores de α satisface $\sin(\alpha) = y/\sqrt{x^2+y^2}$.

- Si $x > 0$ y $y \geq 0$ entonces $0 \leq \mathrm{Arg}(z) < \pi/2$;
- Si $x \leq 0$ y $y > 0$ entonces $\pi/2 \leq \mathrm{Arg}(z) < \pi$;
- Si $x < 0$ y $y = 0$ entonces $\mathrm{Arg}(z) = \pi$.

En términos de la función arcotangente[2] que –recordamos– es la inversa de la función $(-\pi/2, \pi/2) \ni x \mapsto \tan(x)$, tenemos[3]:

$$\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan(y/x) & , \quad \text{si } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & , \quad \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & , \quad \text{si } x < 0 \text{ y } y < 0 \\ -\pi/2 & , \quad \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ \pi/2 & , \quad \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \end{cases}$$

Dos comentarios:

- Se manifiesta claramente la discontinuidad del Arg en la semirrecta real negativa tomando $x < 0$ fijo y variando y alrededor de $y = 0$. Asi por ejemplo, para $\epsilon > 0$ y con $x < 0$

  $$\mathrm{Arg}(x + i\epsilon) = \pi - \arctan(\epsilon/|x|) \ , \ \ \mathrm{Arg}(x - i\epsilon) = -\pi + \arctan(\epsilon/|x|)$$

  de modo que $\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Arg}(x + i\epsilon) = \pi = \mathrm{Arg}(x)$ pero $\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Arg}(x - i\epsilon) = -\pi \neq \mathrm{Arg}(x)$.

- Si bien $\arg(0) = \mathbb{R}$, el argumento principal de $z = 0$ no está definido y el comportamiento de Arg cerca de cero es errático ($\epsilon > 0$):

  $$\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Arg}(\epsilon) = 0 \ , \ \ \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Arg}(-\epsilon) = \pi \ , \ \ \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Arg}(\pm i\epsilon) = \pm\pi/2 \ ,$$

  si $a > 0$

  $$\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Arg}(\epsilon \pm i\epsilon a) = \pm \arctan(a) \ .$$

  Pero entonces podemos obtener cualquier número real considerando los límites de $\mathrm{Arg}(z)$ cuando $z \to 0$.
  Veremos más adelante que la función Arg para complejos en $\mathbb{C}$ sin la semirrecta formada por los números reales no positivos, o sea

  $$S := \mathbb{C} \setminus \{z : \ Re(z) \leq 0 \ , \ \ Im(z) = 0\} \ ,$$

  es una función muy bien comportada (es analítica). El conjunto S es un ejemplo de un dominio (es abierto y conexo) y aparece frecuentemente en el análisis complejo.

---

[2]$\mathbb{R} \ni t \mapsto \arctan(t) \in (-\pi/,2, \pi/2)$ es tantas veces diferenciable como se quiera, impar ($\arctan(-t) = -\arctan(t)$), estrictamente creciente, convexa en $(-\infty, 0]$ y cóncava en $[0, \infty)$ con $\lim_{t\to\pm\infty} \arctan(t) = \pm\pi/2$.

[3]Se puede expresar a $\mathrm{Arg}(z)$ para cualquier complejo no nulo $z = x + iy$ en términos del arco-coseno o del arcoseno; por ejemplo:

$$\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \arcsin(y/\sqrt{y^2 + x^2}) & , \quad \text{si } x \geq 0 \\ \pi/2 - \arcsin(x/\sqrt{x^2 + y^2}) & , \quad \text{si } y \geq 0, \ x < 0 \\ -\pi/2 + \arcsin(x/\sqrt{x^2 + y^2}) & , \quad \text{si } y < 0, \ x \leq 0 \end{cases} \ .$$