Transformación de Laplace y primeras aplicaciones[*]

G.A. Raggio
FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Marzo de 2016

Índice

1. La transformación de Laplace

Para una función a valores complejos definida para $t \geq 0$, su *transformada de Laplace*[1] es la función de la variable compleja z dada por

$$F(z) := \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\, dt \ . \tag{1}$$

Claramente, para que $F(z)$ tenga sentido, es preciso que tanto f como z cumplan con ciertas condiciones que garanticen la existencia de la integral (impropia).

Ejemplo 1.1: Sea $f(t) = \alpha \in \mathbb{C}$, para todo $t \geq 0$. Entonces, siempre que $\Re(z) > 0$, tendremos

$$F(z) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \alpha e^{-zt}\, dt = \alpha \lim_{R\to\infty} \frac{-e^{-zt}}{z} \,|_0^R = \alpha\, z^{-1} \lim_{R\to\infty} (1 - e^{-\Re(z)R - i\Im(z)R}) = \alpha/z \ .$$

Podemos extender a F a la función analítica $z \mapsto \alpha/z$ en todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero si $\Re(z) \leq 0$ esta función no es la transformada de Laplace de algo. ◀

Uno de los resultados de existencia más útiles es:

Teorema 1.1 *Si f es integrable en todo intervalo finito de $[0, \infty)$ y hay $M \geq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, tales que $|f(t)| \leq Me^{at}$ para t lo suficientemente grande, entonces $F(z)$ esta definida y es analítica para todo z en el semiplano abierto $\{w \in \mathbb{C} : \ \Re(w) > a\}$.*

[*] Notas provisorias para *Métodos Matemáticos de la Física II*, 1^{er}-cuatrimestre 2016

[1] Más precisamente esta es la transformada de Laplace unilatera a distinguirse de la bilatera $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-zt}dt$

Ejemplo 1.2: Con $f(t) = e^{at}$ con a constante,

$$F(z) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-(z-a)t}\, dt = \frac{-1}{z-a} \lim_{R\to\infty} e^{-(z-a)t}|_0^R$$
$$= \frac{1}{z-a} \lim_{R\to\infty} (1 - e^{-(\Re(z)-a)R - i\Im(z)R}) = \frac{1}{z-a}$$

si $\Re(z) > a$. ◀

La hipótesis $|f(t)| \leq Me^{at}$ es equivalente a $|f(t)| = \mathcal{O}(e^{at})$ para $t \to \infty$. En tal caso, se puede considerar al menor valor posible de $a \in \mathbb{R}$ tal que $|f(t)| = \mathcal{O}(e^{at})$; este número $\alpha := \inf\{a \in \mathbb{R} : |f(t)| = \mathcal{O}(e^{at})\}$, se llama *abcisa de convergencia* de la transformada de Laplace de f y se tiene F es analítica en el semiplano abierto $\Re(z) > \alpha$.
Si f es integrable o sea, $\int_0^\infty |f(t)|\, dt$ existe, entonces la transformada de Laplace esta definida para todo s complejo con $Re(s) \geq 0$. Si f es acotada, i.e., $|f(t)| \leq K$ para todo $t \geq 0$; entonces la transformada de Laplace existe.
La siguiente es una extensión del resultado anterior

Teorema 1.2 *Supongase que f y sus primeras $n-1$ derivadas son continuas en $[0,\infty)$ y la n-ésima derivada $f^{(n)}$ es suave en todo subintervalo finito $[0,c]$. Si además hay constantes M y a tales que*

$$|f^{(k)}(t)| \leq Me^{at}$$

para todo t lo suficientemente grande y $k = 0,1,\cdots,n-1$, entonces las transformadas de Laplace $F^{(k)}$ de $f^{(k)}$ existen para $k = 0,1,\cdots,n$ cuando $\Re(s) > a$ y se tiene

$$F^{(k)}(s) = s^k F(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0)\ .$$

Anotaremos a la transformada de Laplace de la función f con $\mathcal{L}f$.
Si f es suave en todo subintervalo finito de $[0,\infty)$ y cumple con las condiciones del teorema 1.1 entonces vale la fórmula de inversión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{p\to\infty} \int_{a-ip}^{a+ip} (\mathcal{L}f)(s)e^{st}\, ds\ .$$

Entre las propiedades más útiles –además de la linealidad de esta transformación– se tienen las siguientes:

Teorema 1.3

1. *(Integración).*
   Si $f(t) = \int_0^t \varphi(p)\, dp$, entonces $(\mathcal{L}f)(s) = (\mathcal{L}\varphi)(s)/s$.

   Si $f(t) = \int_0^t \int_0^p \varphi(q)\, dq\, dp$, entonces $(\mathcal{L}f)(s) = (\mathcal{L}\varphi)(s)/s^2$.

   Si $f(t) = \varphi(t)/t$ entonces $(\mathcal{L}f)(s) = \int_s^\infty (\mathcal{L}\varphi)(x)\, dx$.

2. *(Convolución). Si $f(t) = \int_0^t \varphi_1(t-p)\varphi_2(p)\, dp$, entonces $(\mathcal{L}f)(s) = (\mathcal{L}\varphi_1)(s)(\mathcal{L}\varphi_2)(s)$.*

3. *(Diferenciación). Si $f(t) = (-t)^n\varphi(t)$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $(\mathcal{L}f)(s) = (\mathcal{L}\varphi)^{(n)}(s)$.*

4. *(Cambio de escala). Si $f(t) = \frac{1}{c}e^{bt/c}\varphi(t/c)$ con $c > 0$ y b real entonces $(\mathcal{L}f)(s) = (\mathcal{L}\varphi)(cs - b)$.*

5. *(Valor "inicial"). $f(0) = \lim_{s\to\infty} s(\mathcal{L}f)(s)$.*

6. *(Valor "final"). $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} s(\mathcal{L}f)(s)$ si $z(\mathcal{L}f)(z)$ no tiene polos en el semiplano $\{\Re(z) > 0\}$.*

Como fuente de sabiduría sobre la transformación de Laplace recomiendo el libro de Widder. Para las aplicaciones (algunas muy prácticas) ver el libro de Doetsch. La mejor tabla de transformadas de Laplace sigue siendo la de Erdélyi. Hay una buena tabla en Abramowitz & Stegun.

2. Aplicación a la ec. de calor o difusión

La propiedad sobresaliente de la transformación de Laplace en cuanto a su utilidad para atacar problemas de ecuaciones diferenciales es que

$$(\mathcal{L}f)(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0)\ , \quad \text{si } \text{lím}_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0,$$

lo que surge de una integración por partes de la definición. No nos detenemos en las condiciones necesarias para que $\mathcal{L}f$ y $\mathcal{L}f'$ estén bien definidas, si no mas bien buscamos expresiones que formalmente son soluciones de la ec. de difusión. Será preciso entonces verificar a posteriori si estas expresiones conducen realmente a soluciones clásicas de la ED.

Consideremos la ED de difusión o calor

$$u_t = k\Delta u \tag{2}$$

para una función u definida en $V \times (0,\infty)$ donde $V \subset \mathbb{R}^d$ y $k > 0$. Transformamos según Laplace a la función $t \mapsto u(\boldsymbol{x}, t)$:

$$G(\boldsymbol{x}, s) := (\mathcal{L}u(x,\cdot))(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(\boldsymbol{x}, t)\, dt\ .$$

Con (2) y permutando las derivadas espaciales con la integración,

$$-u(\boldsymbol{x}, 0) + sG(\boldsymbol{x}, s) = k(\Delta G)(\boldsymbol{x}, s)\ .$$

Esta es la ecuación de Helmholtz pero ahora inhomogenea debido al término $u(\boldsymbol{x}, 0)$ especificado por la condición inicial. Debemos resolverla para s fijo para luego –variando s– obtener la función $(\boldsymbol{x}, s) \mapsto G(\boldsymbol{x}, s)$. Nuevamente, para simplificar, consideramos una sola variable espacial de modo que la ec. de Helmholtz se transforma en una ODE de segundo orden lineal e inhomogenea con coeficientes que son funciones de s:

$$G''(x, s) = (s/k)G(x, s) - u(x, 0)/k\ .$$

La solución general se obtiene sumándole a la solución general de la ec. homogénea cualquier solución particular. Aplicando la conocida fórmula (de d'Alembert o de variación de constantes), observe que

$$\eta(x, s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{s}} \int_{x_o}^{x} u(y, 0) \left\{ e^{-\sqrt{s/k}\,(x-y)} - e^{\sqrt{s/k}\,(x-y)} \right\} dy$$

es una solución. Luego,

$$A(s)e^{\sqrt{s/k}x} + B(s)e^{-\sqrt{s/k}x} + \eta(x, s)$$

es la solución general de la ec. de Helmholtz para G. Una vez determinadas las funciones A y B, el resto es un problema de invertir la transformación de Laplace. Esto puede hacerse numéricamente sin mayores problemas. Las funciones A y B están determinadas por condiciones subsidiarias. Por ejemplo, por una condición de borde, o una condición de borde y alguna condición asintótica, etc. Veremos ejemplos concretos aquí y en las guías de problemas. En todo caso, si a y b denotan aquellas funciones de $t > 0$ tales que

$$A = \mathcal{L}a\ , \quad B = \mathcal{L}b\ ,$$

podremos expresar a u como suma de la convolución de a con cierta función cuya transformada de Laplace es $e^{\sqrt{s/k}x}$, y de la convolución de b con cierta función cuya transformada de Laplace es $e^{-\sqrt{s/k}x}$; y una expresión integral que involucra a la condición inicial y a aquella función de $t>0$ cuya transformada de Laplace es $\sinh(\sqrt{s/k}x)$.

Es fácil encontrar una solución particular cuando

$$u(x,0)=\alpha\ , \tag{3}$$

pues la función constante e igual a α/s es solución. En tal caso la solución general de nuestra ec. de Helmholtz es

$$G(x,s)=\frac{\alpha}{s}+A(s)e^{\sqrt{s/k}x}+B(s)e^{-\sqrt{s/k}x} \tag{4}$$

con funciones A y B básicamente arbitrarias. Usaremos esta expresión para discutir una serie de casos.

1. Consideremos el caso $V=[0,L]$ con $L>0$ y agreguemos las condiciones de borde $u(0,t)=u(L,t)=0$, $t>0$, que son compatibles con la condición inicial (3) solamente si $\alpha=0$. En tal caso, la unicidad de la solución nos dice que u es idénticamente nula y luego G también lo es. Esto también se obtiene directamente a partir de (4) imponiendo $G(0,s)=G(L,s)=0$[2]. Si suponemos $\alpha>0$ en (3) tendremos una discontinuidad de $t\mapsto u(0,t)$ y de $t\mapsto u(L,t)$ en $t=0$. Pero podemos proseguir de todos modos; obtenemos las ecuaciones

$$0=G(0,s)=\alpha s^{-1}+A(s)+B(s)\ ,$$
$$0=G(L,s)=\alpha s^{-1}+A(s)e^{\xi(s)}+B(s)e^{-\xi(s)}\ .$$

donde usamos

$$\xi(s):=L\sqrt{s/k}\ ;$$

estas ecuaciones se resuelven a:

$$A(s)=-\alpha s^{-1}\,e^{-\xi(s)}\ \frac{(1-e^{-\xi(s)})}{1-e^{-2\xi(s)}}$$

$$B(s)=-\alpha s^{-1}\ \frac{(1-e^{-\xi(s)})}{1-e^{-2\xi(s)}}\ .$$

De modo que

$$G(x,s)=\frac{\alpha}{s}\left(1-\frac{e^{-\xi(s)(1-x/L)}-e^{-\xi(s)(2-x/L)}+e^{-\xi(s)x/L}-e^{-\xi(s)(1+x/L)}}{1-e^{-2\xi(s)}}\right)\ .$$

La tarea es ahora calcular la transformación de Laplace inversa de G. Sabiendo que la transformada de Laplace de

$$e(t):=\ \mathrm{erfc}(\lambda/2\sqrt{t})\ ,\ \ \lambda\geq 0\ ,$$

es

$$(\mathcal{L}e)(s)=\frac{e^{-\lambda\sqrt{s}}}{s}$$

se sugiere la expansión[3]

$$\frac{1}{1-e^{-2\xi(s)}}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n\xi(s)}\ .$$

[2] Vea las expresiones para A y B que siguen y ponga $\alpha=0$.
[3] Que converge uniformemente en s para $s\geq s_o$ donde $s_o>0$ es arbitrario.

Esto nos permite expresar a G como serie infinita de términos que son todos proporcionales a $e^{-\lambda\sqrt{s}}/s$ con ciertas $\lambda \geq 0$ que dependen de x, k, L y del índice de sumación. Obtenemos así la siguiente serie para u

$$u(x,t) = \alpha \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{L(2n+1-x/L)}{2\sqrt{kt}} \right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{L(2n+2-x/L)}{2\sqrt{kt}} \right) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \operatorname{erfc}\left(\frac{L(2n+x/L)}{2\sqrt{kt}} \right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{L(2n+1+x/L)}{2\sqrt{kt}} \right) \right] \right\} .$$

Observese que para $t > 0$,

$$u(0,t) = u(L,t) = \alpha \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{Ln}{\sqrt{kt}} \right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{L(n+1)}{\sqrt{kt}} \right) \right] \right\} = \alpha(1 - \operatorname{erfc}(0)) = 0 .$$

Esta serie ha de ser comparada y contrastada con la serie de Fourier obtenida por separación de variables[4]. Son "complementarias" en el sentido que la convergencia de la serie de Fourier mejora si aumentamos t mientras que esta mejora si disminuimos t[5]. En cuanto a la discontinuidad en $t = 0$ en los bordes, lo que podemos decir es que: la serie converge punto a punto en todo (x,t) con $0 < x < L$ y $t > 0$ y que la suma u satisface (2) y $u(x,0) = \alpha$ para $0 < x < L$ así como $u(0,t) = u(L,t)$ para $t > 0$.

2. Veamos el caso $V = [0, \infty)$ conservando la condición inicial (3) y agregando como condición de borde la condición

$$u(0,t) = h(t) ,$$

que trae consigo que

$$G(0,s) = H(s)$$

siendo H la transformada de Laplace de h. Nuevamente observe que habrá una discontinuidad en $(0,0)$ si $h(0) \neq \alpha$. Si suponemos que h es acotada y buscamos una solución u que sea acotada, vale decir

$$|u(x,t)| \leq K \text{ para todo } x \in V \text{ y todo } t \geq 0 ,$$

tendremos

$$|G(x,s)| \leq K \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = K/s ,$$

de modo que $x \mapsto G(x,s)$ es también acotada. Esto no es posible si en (4) se tiene $A(s) \neq 0$ para algún $s > 0$. Por lo tanto planteamos

$$G(x,s) = \frac{\alpha}{s} + B(s) e^{-\sqrt{s/k}x} ;$$

luego

$$H(s) = G(0,s) = \frac{\alpha}{s} + B(s)$$

de modo que

$$G(x,s) = \frac{\alpha}{s}\left(1 - e^{-\sqrt{s/k}x}\right) + H(s) e^{-\sqrt{s/k}x} .$$

[4] O sea:

$$u(x,t) = 4(\alpha/\pi) \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-(2n+1)^2\pi^2 kt/L^2} \sin((2n+1)\pi x/L)}{2n+1} .$$

[5] La función de error complementaria $\operatorname{erfc}(x) := (2/\sqrt{\pi}) \int_x^{\infty} e^{-p^2}\, dp$, $x \geq 0$, es decreciente con $\operatorname{erfc}(0) = 1$ y $\lim_{x\to\infty} \operatorname{erfc}(x) = 0$.

Ya hemos presentado la transformada de Laplace inversa del primer sumando; tenemos

$$\alpha s^{-1}(1 - e^{-\sqrt{s/k}x}) \overset{\mathcal{L}}{\longleftarrow} \alpha(1 - \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt})) = \alpha \operatorname{erf}(x/2\sqrt{kt}) \; .$$

Para el segundo sumando usamos la propiedad de convolución. Esto con

$$e^{-\sqrt{s/k}x} \overset{\mathcal{L}}{\longleftarrow} \frac{x}{2\sqrt{k\pi t^3}} \, e^{-x^2/(4kt)}$$

nos da

$$u(x,t) = \alpha \operatorname{erf}(x/(2\sqrt{kt})) + \frac{x}{2\sqrt{k\pi}} \int_0^t h(t') \, \frac{e^{-x^2/(4k(t-t'))}}{(t-t')^{3/2}} \, dt' \; . \tag{5}$$

Se puede verificar directamente que está función es solución de la ED y que $u(x,0) = \alpha$ para $x > 0$. Que también se tiene $u(0,t) = h(t)$ para $t > 0$ requiere de cierto esfuerzo (ver apéndice) ya que si permutamos el límite $x \to 0$ con la integración en el segundo sumando obtenemos simplemente 0.

Es conveniente detenerse a valorar la expresión (5) para la solución. La condición inicial (en este caso $u(x,0) = \alpha$) está incorporada pero la función h es libre; obtuvimos una sola fórmula para acomodar cualquier condición de borde en $x = 0$. Además, la integral de convolución (el segundo sumando de (5)) es susceptible de tratamiento númerico perfectamente directo y sencillo.

3. Bibliografía

1. D.V. Widder: *The Laplace Transform.* Princeton Mathematical Series, v. 6, Princeton University Press, Princeton 1941.

2. G. Doetsch, *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation.* Springer, Berlin 1974.

3. A. Erdélyi: *Tables of Integral Transforms, Vol. 1.* McGraw-Hill, New York 1954. Chapters IV & V. http://authors.library.caltech.edu/43489/1/Volume%201.pdf .

4. Abramowitz & Stegun: *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, New York 1965; paginas 1019 y siguientes (novena impresión). Ver la w-página de la materia.

A. Un esfuerzo: estimación de (5) para $x \to 0$.

Regresamos al segundo sumando de (5) y su límite $x \to 0$.
Recordamos que la función error

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} \, dp \; , \;\; x \geq 0 \; ,$$

es positiva, creciente y continua con $\operatorname{erf}(0) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$. Se tiene

$$\operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-p^2} \, dp \; ;$$

que es positiva, decreciente y continua con $\operatorname{erfc}(0) = 1$.
Sea

$$K(x,t); = \frac{x}{2\sqrt{k\pi} \, t^{3/2}} e^{-x^2/(4kt)} \;\; , \;\; x > 0 \; , \;\; t > 0 \; .$$

Entonces
$$\int_0^t K(x,s)\,ds = \frac{x}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^t \frac{e^{-x^2/(4ks)}}{s\sqrt{s}}\,ds \overset{p:=x/(2\sqrt{ks})}{=} \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt})\ .$$
Ahora, con esto,
$$h(t) - \int_0^t h(t')K(x,t-t')\,dt' = h(t)\left[\operatorname{erf}(x/2\sqrt{kt}) + \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt})\right]$$
$$-\int_0^t h(t')K(x,t-t')\,dt' = h(t)\operatorname{erf}(x/2\sqrt{kt}) + \int_0^t (h(t)-h(t'))K(x,t-t')\,dt'$$
ya que
$$\int_0^t K(x,t-t')\,dt' = \int_t^0 K(x,y)(-dy) = \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt})\ .$$
Por lo tanto
$$\left|h(t) - \int_0^t h(t')K(x,t-t')\,dt'\right| \le |h(t)|\operatorname{erf}(x/2\sqrt{kt}) + \left|\int_0^t (h(t)-h(t'))K(x,t-t')\,dt'\right|\ ,$$
que es nuestra desigualdad básica.

Ya que erf es continua con $\operatorname{erf}(0) = 0$, dado $t > 0$ y $\epsilon > 0$ hay x lo suficientemente chico para que
$$|h(t)|\operatorname{erf}(x/2\sqrt{kt}) < \epsilon/2\ .$$
Si ahora, además, h satisface una condición de Lipschitz, o sea hay $c > 0$ con
$$|h(t_1) - h(t_2)| \le c|t_1 - t_2|\ ,\ \ t_1, t_2 > 0\ ;$$
entonces para el segundo término de la desigualdad básica tendremos
$$\left|\int_0^t (h(t)-h(t'))K(x,t-t')\,dt'\right| \le \int_0^t |h(t)-h(t')|K(x,t-t')\,dt'$$
$$\le c\int_0^t (t-t')K(x,t-t')\,dt' = \frac{cx}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^t \frac{e^{-x^2/(4k(t-t'))}}{\sqrt{t-t'}}\,dt' = \frac{cx}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^t \frac{e^{-x^2/(4ky)}}{\sqrt{y}}\,dy$$
$$\le \frac{cx}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{cx\sqrt{t}}{\sqrt{k\pi}}\ .$$
Por lo tanto, dado $t > 0$ y $\epsilon > 0$ hay x lo suficientemente chico de modo que
$$\left|\int_0^t (h(t)-h(t'))K(x,t-t')\,dt'\right| < \epsilon/2\ .$$
Esto indica que si h satisface una condición de Lipschitz se tiene
$$\lim_{x\to 0^+}\int_0^t \frac{xh(t')e^{-x^2/(4k(t-t'))}}{\sqrt{k\pi}(t-t')^{3/2}}\,dt' = h(t)\ .$$