Solución Problema 10, Guía 5:

En el problema 9 de G5 vimos que, dado que

$$R(\mathbf{x},t) = \frac{sgn(t)}{2\pi c}\,\delta(c^2t^2 - |\mathbf{x}|^2) \tag{1}$$

satisface la ecuación de onda en $\mathbb{R}^3$ con condición inicial

$$R(\mathbf{x}, t=0) = 0, \qquad R_t(\mathbf{x}, t=0) = \delta(\mathbf{x}), \tag{2}$$

entonces

$$w(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} R(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)\,\psi(\mathbf{y})\,d^3\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^3} R(\mathbf{y},t)\,\psi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d^3\mathbf{y} \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \tag{3}$$

satisface la ecuación de onda en $\mathbb{R}^3$ con condición inicial

$$w(\mathbf{x},0) = 0, \qquad w_t(\mathbf{x},0) \;=\; \psi(\mathbf{x}). \tag{4}$$

P10 pide encontrar el análogo a R en $\mathbb{R}^2$ (dos dimensiones espaciales). Dejamos como ejercicio (usando el P4 de la G5), ver que la función de Green (1) se puede re-escribir como la resta de las funciones de Green retrasada menos avanzada:

$$R(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2|\mathbf{x}|}\left(\delta(t-|\mathbf{x}|/c) - \delta(t+|\mathbf{x}|/c)\right) =: R_R(\mathbf{x},t) - R_A(\mathbf{x},t). \tag{5}$$

Si el dato $\psi(\mathbf{x})$ no depende de $\mathbf{x}_3$, entonces w en (3) no dependerá de $\mathbf{x}_3$:

$$\frac{\partial w}{\partial x_3} = \int_{\mathbb{R}^3} R(\mathbf{y},t)\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\psi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right) d^3y = 0\;. \tag{6}$$

En este caso, al no depender w de x_3, será solución de la ecuación de onda en $\mathbb{R}^2$: $c^2(\partial^2 w/\partial x_1^2 + \partial^2 w/\partial x_2^2) = \partial^2 w/\partial t^2$ y satisfará (4). En particular, si usamos $\psi(\mathbf{y}) = \delta(y_1)\delta(y_2)$ (que no depende de y_3), la w resultante será la función de Green que se pide en el P10, que llamaremos R_{2D}:

$$R_{2D}(x_1,x_2,t) = \int_{\mathbb{R}^3} R\left((x_1,x_2,0)-(y_1,y_2,y_3),t\right)\;\delta(y_1)\delta(y_2)\;dy_1dy_2dy_3 \tag{7}$$

(note que podríamos haber puesto cualquier valor de x_3 en lugar de $x_3=0$, el resultado sería el mismo). Insertando (1) en (7) obtenemos

$$\begin{aligned} R_{2D}(x_1,x_2,t) &= \frac{sgn(t)}{2\pi c}\int_{\mathbb{R}^3} \delta(c^2t^2 - (x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2 - y_3^2)\;\delta(y_1)\delta(y_2)\;dy_1dy_2dy_3 \\ &= \frac{sgn(t)}{2\pi c}\int_{\mathbb{R}} \delta(c^2t^2 - (x_1^2+x_2^2+y_3^2))\;dy_3 \\ &= \frac{sgn(t)\Theta(c^2t^2-(x_1^2+x_2^2))}{2\pi c}\int_{\mathbb{R}} \frac{\delta\left(y_3 - \sqrt{(ct)^2-(x_1^2+x_2^2)}\right) + \delta\left(y_3 + \sqrt{(ct)^2-(x_1^2+x_2^2)}\right)}{2\sqrt{(ct)^2-(x_1^2+x_2^2)}}\;dy_3 \\ &= \frac{sgn(t)\;\Theta(c^2t^2-(x_1^2+x_2^2))}{2\pi c\sqrt{(ct)^2-(x_1^2+x_2^2)}} \end{aligned} \tag{8}$$

Un cálculo parecido muestra que, si en vez de R usáramos R_R en (7), obtendríamos

$$R_{2D}^R(x_1,x_2,t) = \frac{\Theta(ct - \sqrt{x_1^2+x_2^2})}{2\pi c\sqrt{(ct)^2-(x_1^2+x_2^2)}}$$

Note que en $\mathbb{R}^3$ el valor de la solución de la ecuación de onda en un punto $\mathbf{x}$ al tiempo $t>0$ depende sólo del dato en los puntos $\mathbf{y}$ tales que $|\mathbf{y}-\mathbf{x}| = ct$, mientras que en $\mathbb{R}^2$ depende de los $\mathbf{y}$ tales que $|\mathbf{y}-\mathbf{x}| \le ct$.