Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I – 2016

Ceros de funciones reales – un ejemplo

Para valorar y poner en perspectiva los resultados obtenidos para ceros de funciones analíticas analizamos un ejemplo real donde las cosas son muy distintas. Considere la función real de una variable real x dada por

$$\phi(x) := \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-1/x) & , \quad \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Veremos enseguida que esta función es tantas veces diferenciable como se quiera y, además, que todas sus derivadas se anulan en $x = 0$.
Ahora, cualquiera sea el entorno $(-a, a)$ $(a > 0)$ de $x = 0$, la función ϕ no es idénticamente nula y tiene infinitos ceros en ese entorno ya que ϕ se anula en $(-a, 0]$. En otras palabras, el punto $x = 0$ es un punto de acumulación del conjunto de ceros de la función ϕ que no es idénticamente nula. Esto, como vimos, *no puede pasar para una función analítica.*

Además, porque las derivadas en cero se anulan, la serie de Taylor (MacLaurin en este caso) de ϕ alrededor de $x = 0$ es la serie idénticamente nula –que es tan convergente como quieras– pero ϕ no está dada por la serie de Taylor cuando $x > 0$. De nuevo, esto *¡no puede pasar con una función analítica!*

Para verificar la diferenciabilidad de ϕ, recordamos que la función exponencial real es (positiva) estrictamente creciente (y convexa) con

$$\lim_{x\to\infty} x^{-p} \exp(x) = \infty \ , \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^p \exp(x) = 0$$

para cualquier exponente real $p \geq 0$ (y también, por supuesto, para $p < 0$).
Claramente

$$\frac{\phi(x) - \phi(y)}{x - y} = 0 \ , \quad 0 > x \neq y < 0$$

de modo que la derivada $\phi'(x) = 0$ cualquiera sea $x < 0$. Para $x > 0$ tenemos –usando la regla de la cadena–

$$\phi'(x) = \exp(-1/x)/x^2 \ , \quad x > 0$$

y, por la propiedad de la función exponencial, $\lim_{x\to 0} \phi'(0) = 0$. Para el cociente diferencial en $x = 0$ tenemos que

$$\frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = t^{-1}\phi(t) \ , \quad t \neq 0$$

y el límite de esto cuando $t \to 0$ es cero.

Más generalmente, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi^{(n)}(x) = 0 \ , \quad x < 0 \ ;$$

y vale el siguiente resultado que el lector sabrá demostrar por inducción:

Lema *Para $x > 0$ y $n = 1, 2, 3, \cdots$, se tiene*

$$\phi^{(n)}(x) = \frac{\phi(x)}{x^{2n}} \, p_n(x)$$

donde p_n *es un polinomio de orden* $n-1$ *y* $\lim_{x\to 0} \phi^{(n)}(x) = 0$.

Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$

$$\frac{\phi^{(n)}(t)}{t} = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\phi(t)}{t^{2n+1}}\, p_n(t) & , \quad \text{si } t > 0 \end{cases} ,$$

cuyo límite para $t \to 0$ es cero. Pero entonces, el límite del cociente diferencial en $x = 0$ existe y es cero. O sea que

$$\phi^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\phi(x)}{x^{2n}}\, p_n(x) & , \quad \text{si } x > 0 \end{cases} ,$$

es la n-ésima derivada de ϕ.