Métodos Matemáticos de la Física II

Clasificación de EDP de segundo orden, formas normales y superficies características.

Consideramos EDP de segundo orden

$$\sum_{j,k=1}^{d} a_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + f(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) = 0 \ , \tag{1}$$

con $a_{j,k} = a_{k,j}$ reales que pueden ser funciones de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ y las suponemos no todas nulas pues sino la EDP no sería de segundo orden. En tal caso la matriz $(d \times d)$ formada por estos coeficientes $\mathbb{A} = (a_{j,k})$ es real y simétrica y su espectro consiste de autovalores reales con cierta multiplicidad no mayor a d. Se dice que la EDP (1) en el pto. $\boldsymbol{x}$ es:

- *elíptica* si no hay autovalor nulo y todos tienen el mismo signo. El ejemplo –como veremos típico es la ec. de Laplace.
- *hiperbólica en general* si no hay autovalor nulo pero no todos los autovalores tienen el mismo signo. Cuando hay un único autovalor simple de signo distinto al de todos los demás se habla de una EDP *hiperbólica normal*; la ecuación de ondas es el ejemplo canónico.
- *parabólica en general* Si hay autovalor nulo. Cuando este es simple y los demás autovalores tienen el mismo signo se habla de una EDP *parabólica normal* siendo la ec. de difusión el ejemplo canónico.

Cuando $\mathbb{A}$ no es constante la clasificación varia cuando nos movemos en el dominio; aunque las ec. elípticas o hiperbólicas en un punto lo serán en un entorno de ese punto si las funciones $a_{j,k}$ son continuas.

En el caso particular de 2 variables ($d = 2$) la EDP (1) toma la forma

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,u,\nabla u) = 0 \tag{2}$$

y la clasificación queda determinada por el signo de la discriminante $det(\mathbb{A}) = ac - b^2$ que es igual al producto de los autovalores. La ec. es elíptica si $ac - b^2 > 0$; hiperbólica (y normal) si $ac - b^2 < 0$; y parabólica (normal) si $ac - b^2 = 0$.

Pasamos ahora a considerar la EDP (1) con datos especificados en una superficie (Problema de Cauchy). Dada una función ϕ continuamente diferenciable en un abierto Ω en $\mathbb{R}^d$ se consideran las superficies (llamadas superficies de nivel) $S := \{\boldsymbol{x} : \phi(\boldsymbol{x}) = const.\}$. Si esta no es vacia hay $\boldsymbol{x}_o \in S$ y podemos escribir $S = \{\boldsymbol{x} : \phi(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}_o)\}$. Un punto $\boldsymbol{x}$ de S se dice *no-singular* si

$$(\nabla\phi)(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0} \ .$$

Consideremos superficies de nivel S asociadas con una función dos veces continuamente diferenciable ϕ tal que todos los puntos de la superficie son no-singulares. Supongase que se conoce a u y a todas sus derivadas parciales en un punto $\boldsymbol{x}_o \in S$. Podemos entonces hacer una expansión de Taylor alrdedor de ese punto para calcular u en un entorno del punto. Y variando el punto en S obtener a la solución u en un abierto que contiene a S. Una pregunta natural es entonces la siguiente: si conozco a u y a ∇u en S, ¿es posible determinar todas las derivadas parciales de u en S a partir de la EDP? Esta es una pregunta que involucra a la EDP y a la superficie de nivel y la relación entre ellas. Para adelantar la discusión se considera una transformación de variables que aplica a la superficie S en un hiperplano. Suponemos que $\partial\phi/\partial x_1$ no se anula en Ω y consideramos la transformación de variables $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{\xi}$ determinada por

$$\text{(3)} \qquad \xi_1 := \phi(\boldsymbol{x}) \ , \ \ \xi_j := x_j \ , \ \ j = 2, \cdots, d \ ,$$

de modo que el Jacobiano $J(\boldsymbol{x}) := (J_{j,k}(\boldsymbol{x}))$ dado por

$$J_{j,k} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \ , \ j,k = 1,2,\cdots,d$$

es regular en Ω (o sea: $det(J(\boldsymbol{x})) \neq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in \Omega$). Claramente la imagen de S bajo esta transformación es un abierto S_o en el hiperplano $\{\boldsymbol{\xi} : \xi_1 = const.\}$. Por la regla de la cadena con $v(\boldsymbol{\xi}) = u(\boldsymbol{x})$ tenemos

$$\text{(4)} \qquad u_{x_j} = \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} v_{\xi_1} & , \quad \text{si } j = 1 \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial x_j} v_{\xi_1} + v_{\xi_j} & , \quad \text{si } j = 2, \cdots, d \end{cases} .$$

Es importante observar que las derivadas parciales v_{ξ_j} para $j \geq 2$ en S_o pueden calcularse a partir de los valores de v en S_o. No así v_{ξ_1} que necesita conocimiento de valores de v fuera de la hipersuperficie S_o donde ξ_1 es constante. Sin embargo, (4) nos permite calcular a v_{ξ_1} a partir del conocimiento del gradiente de u en S.
Para las segundas derivadas obtenemos

$$u_{x_j x_k} = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}\right) v_{\xi_1} + \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^2 v_{\xi_1,\xi_1} & , \quad \text{si } (j,k) = (1,1) \\[2ex] \left(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k}\right) v_{\xi_1} + \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) v_{\xi_1,\xi_1} + \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) v_{\xi_j,\xi_k} & , \quad \text{si } (j,k) \neq (1,1) \end{cases} ;$$

de modo que la ec. diferencial (1) adopta la forma –solo explicitamos los sumandos con derivadas de segundo orden de v–

$$\text{(5)} \qquad \left[\sum_{j,k=1}^{d} a_{j,k}\, \phi_{x_j}\phi_{x_k}\right] v_{\xi_1,\xi_1} = -\frac{1}{2} \sum_{\{1\leq j,k \leq d\,;\,(j,k)\neq(1,1)\}} a_{j,k} \left(\phi_{x_j}\phi_{x_k}\right) v_{\xi_j,\xi_k} + g(\boldsymbol{\xi}, v, (\nabla_\xi v)) \ .$$

Observamos que el sumando g se conoce en S_o si tanto u como ∇u son datos en S ya que (4) puede invertirse para evaluar a $(\nabla_\xi v)$ en S_o como ya observamos. En particular v_{ξ_1} se conoce entonces en S_o. Ya que las derivadas parciales respecto de ξ_j con $j \geq 2$ están determinadas por valores en S_o podemos determinar $v_{\xi_1,\xi_j} = v_{\xi_j,\xi_1}$ asi como v_{ξ_j,ξ_k} para $(j,k) \neq (1,1)$, a partir de los datos en S . En cambio el cálculo de v_{ξ_1,ξ_1} involucra el conocimiento de valores de v_{ξ_1} en puntos que no están en S_o ($\partial/\partial\xi_1$ es una derivada "normal" a la superficie S_o). El cálculo de v_{ξ_1,ξ_1} será posible a partir de la ecuación diferencial si el factor correspondiente no se anula ya que el miembro derecho de (5) es calculable a partir de los datos u y ∇u en S asi como la función ϕ. La discusión dada depende de que $\phi_{x_1} \neq 0$ en algún punto de S. Pero la hipótesis de no-singularidad de los puntos de S implica que cualquiera sea el punto de S necesariamente $\phi_{x_k} \neq 0$ para algún k y la continuidad implica que para ese k $\phi_{x_k} \neq 0$ en un entorno del punto; pero realizando la transformación (3) con k y 1 permutados el factor de v_{ξ_k,ξ_k} es independiente de k. De modo que la superficie S se dice *no característica* si:

$$\sum_{j,k=1}^{d} a_{j,k} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) \neq 0 \ .$$

Si en cambio

$$(\nabla\phi)(\boldsymbol{x}_o) \cdot (\mathbb{A}(\boldsymbol{x}_o)(\nabla\phi)(\boldsymbol{x}_o)) = \sum_{j,k=1}^{2} a_{j,k}(\boldsymbol{x}_o) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{x}_o) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right)(\boldsymbol{x}_o) = 0 \tag{6}$$

en el punto no singular $\boldsymbol{x}_o \in S$ entonces se dice que la superficie S es *característica* en ese punto. Se hace la observación de ϕ debe ser a su vez una solución de la EDP no lineal (6) –llamada ecuación característica– que además cumple con la condición de no singularidad equivalente a

$$\nabla\phi(\boldsymbol{x}_o)^2 > 0 \ . \tag{7}$$

Un caso especial es el de las funciones ϕ lineales $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{x}$ donde $\nabla\phi = \boldsymbol{d}$ y la condición característica es

$$\boldsymbol{d} \cdot A(\boldsymbol{x}_o)\boldsymbol{d} = \sum_{j,k=1}^{2} a_{j,k}(\boldsymbol{x}_o) d_j d_k = 0 \ .$$

Ejemplos y desarrollos

1. (Laplaciano): Para la ec. de Laplace –que es elíptica– la matriz $\mathbb{A}$ es un múltiplo (no-nulo) de la identidad y la condición (6) es $(\nabla\phi)(\boldsymbol{x}_o) = \mathbf{0}$ lo que es incompatible con la condición de no-singularidad. No hay por ende superficies características.

2. (Elípticas): Si la EDP es elíptica en un punto $\boldsymbol{x}_o$ tendremos multiplicando eventualmente a la EDP por (-1) que los autovalores de $\mathbb{A}(\boldsymbol{x}_o)$ enumerados teniendo en cuenta su mutiplicidad seran $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ todos positivos. Hay una transformación ortogonal $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^d$ de modo que
$$\mathbb{T}^*\mathbb{A}(\boldsymbol{x}_o)\mathbb{T} = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \ .$$
Sea
$$\mathbb{B} := \mathbb{T} diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_d})\mathbb{T}^* \ .$$
Entonces $\mathbb{B} = \mathbb{B}^*$ y $\mathbb{B}^2 = \mathbb{A}(\boldsymbol{x}_o)$. Suponga que la superficie S determinada por ϕ es característica en $\boldsymbol{x}_o$. En tal caso omitiendo la evaluación en $\boldsymbol{x}_o$ en la notación,
$$0 = (\nabla\phi) \cdot [\mathbb{A}(\nabla\phi)] = (\nabla\phi) \cdot [\mathbb{B}^2(\nabla\phi) = [\mathbb{B}^*(\nabla\phi)] \cdot [\mathbb{B}(\nabla\phi)] = [\mathbb{B}(\nabla\phi)]^2$$
y por lo tanto $\mathbb{B}(\nabla\phi) = 0$ y entonces
$$\mathbb{T} diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_d})\mathbb{T}^*(\nabla\phi) = \mathbf{0} \ ;$$
de donde
$$diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_d})\mathbb{T}^*(\nabla\phi) = \mathbf{0} \ ;$$
por lo cual, ya que $\sqrt{\lambda_j} > 0$, $\mathbb{T}^*(\nabla\phi) = \mathbf{0}$ y por ende $(\nabla\phi) = \mathbf{0}$ contradiciendo la condición de no-singularidad de $\boldsymbol{x}_o$. ¡Las ec. de segundo orden elípticas no admiten características!

3. (Ec. hiperbólica o parabólica) Discutimos el caso $d = 2$ o sea la EDP (2) suponiendo que $ac - b^2 \leq 0$ o sea los casos hiperbólico normal (< 0) o parabólico normal ($= 0$). La ec. característica (6) es

$$a(\phi_x)^2 + 2b\phi_x\phi_y + c(\phi_y)^2 = 0 \; .$$

Si ϕ es solución con $\phi_y \neq 0$ en un entorno del punto (x_o, y_o), el teorema de la función implicita entrega un entorno del punto x_o y allí definida una función $y(x)$ tal que $\phi(x, y(x)) = const.$ con $y'(x) = -\phi_x/\phi_y$. Se tiene entonces –siempre en ese entorno de x_o– que

$$0 = a(-y'\phi_y)^2 + 2b(-y'\phi_y)\phi_y + c(\phi_y)^2 = (\phi_y)^2\left[a(y')^2 - 2by' + x\right] \; ,$$

de modo que $a(y')^2 - 2by' + c = 0$. Si $a \neq 0$ se tiene entonces[1]

$$y'_{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{8}$$

Observe que en el caso hiperbólico[2] $y'_{\pm}$ es real. Mientras que en el caso parabólico $y'_{\pm} = b/a$. Hemos verificado que la ec. característica cuando $a \neq 0$ y $\phi_y \neq 0$ es equivalente a la ec. lineal

$$\phi_x + y'_{\pm}\phi_y = 0 \; . \tag{9}$$

Inversamente si ϕ es solución de esta ec. lineal donde $y'_{\pm}$ viene dado por (8) entonces ϕ es solución de la ec. característica.
En el caso parabólico la solución de (9) nos provee de una cierta superficie característica.
En el caso hiperbólico sean $\psi_{\pm}$ las soluciones de (9) correspondientes a $y'_{\pm}$ y suponga que $\nabla\psi_{\pm} \neq \mathbf{0}$. Se tiene:

a) Las curvas (superficies) de nivel $\{(x, y) : \psi_+(x, y) = \alpha\}$ y $\{(x, y) : \psi_-(x, y) = \beta\}$ se cortan y no se tocan: en un punto común a estas curvas las tangentes a estas curvas son distintas. Esto es consecuencia de que las diferencia de las pendientes de las tangentes a estas curvas en un punto común es $y'_+(x) - y'_-(x) = 2\sqrt{b^2 - ac}\,/\,a \neq 0$.

b) La transformación $(x, y) \mapsto (\phi_+(x, y), \phi_-(x, y))$ es regular en tanto y en cuanto $(\phi_+)_x(\phi_-)_y - (\phi_+)_y(\phi_-)_x \neq 0$. Esto es consecuencia de que

$$0 \neq \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a} = y_+(x) - y_-(x) = \frac{-(\phi_+)_x}{(\phi_+)_y} - \frac{-(\phi_-)_x}{(\phi_-)_y} = \frac{(\phi_-)_x(\phi_+)_y - (\phi_+)_x(\phi_-)_y}{(\phi_+)_y(\phi_-)_y} \; .$$

c) En términos de la transformación (regular por b)) de coordenadas $\xi := \psi_+(x, y)$ y $\eta := \psi_-(x, y)$ la EDP para $v(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ se transforma (haga el cálculo) en

$$v_{\xi,\eta} = h(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

que es la forma canónica de la EDP hiperbólica normal en 2 variables.

Ejemplo: La ec. de ondas $u_{tt} = u_{xx}$ (la velocidad de propagación ha sido incoprorada a la variable temporal) es hiperbólica normal. la ec. característica es

$$(\phi_t)^2 = (\phi_x)^2 \iff [\phi_t + \phi_x][\phi_t - \phi_x] = 0 \; .$$

[1] Si $a = 0$ en el entorno en cuestión pero $c \neq 0$ intercambie x e y y considere la función $x(y)$ análoga. Si $a = c = 0$ en el entorno entonces $b \neq 0$ y la solución es $\phi(x, y) = f(x)$ o $\phi(x, y) = g(y)$.

[2] En el caso elíptico $y'_{\pm}$ no es real.

Las ec. diferenciales para $\psi_\pm$ son respectivamente

$$(\psi_\pm)_t \pm (\psi_\pm)_x = 0$$

cuyas solución general es $\psi_\pm(x,t) = f_\pm(t \mp x)$ con $f_\pm$ diferenciable y derivadas nunca nulas. Las curvas características son las curvas de nivel $S_\pm := \{(x,t) : f_\pm(t \mp x) = const.\}$; pero como $f_\pm$ es monotona podemos reescribir $S_\pm = \{(x,t) : t \mp x = f_\pm^{-1}(const.)\}$ que son las ya discutidas rectas características de la ec. de ondas en una dimensión espacial. Además las variables canónicas son (funciones monótonas) de $\xi = t + x$ y $\eta = t - x$ lo que recupera la transformación hecha allá al comienzo del curso para obtener la solución general $u(x,t) = f(x+t) + g(t-x)$.