Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 1 (14/03/17)

Problema 1: Muestre que si los coeficientes constantes a_{12} y a_{21} no son ambos nulos y las funciones g_1 y g_2 son diferenciables entonces el sistema

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2' + g_1 \ , \ \ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2$$

se puede reducir a una única ecuación diferencial (lineal e inhomogenea) de segundo orden.

Problema 2: Determine la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogeneas de primer orden

a) $x' = x - 2y$, $y' = -3x$;

b) $x' = 2x + y$, $y' = 2y$;

c) $x' = -2x + \frac{1}{4}y$, $y' = -x - y$;

d) $x' = x - y$, $y' = 2x - y$.

Problema 3: Determine la solución del problema de Cauchy $x(0) = x_o$, $y(0) = y_o$ para el sistema

$$x' = \cos(t)x - \operatorname{sen}(t)y \ , \ \ y' = \operatorname{sen}(t)x + \cos(t)y \ .$$

Problema 4: Muestre que hay una única solución al problema

$$u_x = 3x^2y + y \ , \ \ u_y = x^3 + x \ , \ \ u(0,0) = 0 \ .$$

Luego muestre que el problema

$$u_x = (3 - 10^{-82})x^2y + y \ , \ \ u_y = x^3 + x$$

no tiene ninguna solución.

Problema 5: Muestre que cada una de las siguientes ecuaciones admite una solución de la forma $u(x,y) = \exp\{ax + by\}$ con a, b constantes.

a) $u_x + 3u_y + u = 0$;

b) $u_{xx} + u_{yy} = 5e^{x-2y}$;

¿Que sucede si se cambian muy ligeramente los coeficientes a la izquierda en cada caso?

Problema 6: Considere el problema (de Neumann para el Laplaciano)

$$\Delta u = f \text{ en } V \text{ con } \ \ \boldsymbol{n} \cdot \nabla u = 0 \text{ en } \partial V \ ,$$

donde $V \subset \mathbb{R}^3$ con borde ∂V y $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario normal a ∂V que apunta hacia afuera de V. Razone que la solución no es única. Use el Teorema de la Divergencia para establecer que

$$\int_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 0$$

es condición necesaria para la solubilidad del problema.

Problema 7: Sea p una función real diferenciable sobre los reales. Muestre que la ecuación

$$u_t = p(u)u_x \ , \quad t > 0 \ ,$$

tiene una solución de la forma $u(x,t) = f(x + p(u(x,t))t)$ donde f es real y diferenciable sobre los reales y cumple cierta condición (¡Recuerde el Teorema de la Función Implícita!). Use esto para determinar soluciones de las ecuaciones

a) $u_t = ku_x$, k constante;

b) $u_t = uu_x$;

c) $u_t = u\sin(u)u_x$.

¿Que condición puede agregarse para determinar a f?

Problema 8: Considere la temperatura en una esfera sólida y suponga que esta es función del radio (r) y del tiempo (t) solamente. Muestre que la ecuación del calor es entonces

$$\phi_t = a^2(\phi_{rr} + 2r^{-1}\phi_r) \ .$$

Discuta una transformación de tipo $\phi = r^\alpha \psi$ para reducir esta ecuación a la ecuación del calor unidimensional.
Considere un cilindro recto y suponga que la temperatura es una función axial y del tiempo. ¿Que forma toma la ecuación del calor ? ¿ Que ocurre cuando se realiza la transformación $\xi = \ln(\text{coordenada axial})$?