Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 2 (28/03/17)

Problema 1: Determinar la distribución estacionaria de la temperatura dentro de la capa esférica $a < r < b$ si la esfera $r = a$ se mantiene a temperatura T_1 y la esfera $r = b$ se mantiene a temperatura T_2.

Problema 2: Considere el siguiente problema de Neumann en el intervalo $[0, L]$

$$y'' = \lambda y\,,\ y'(0) = y'(L) = 0\ .$$

a) Sin usar la forma explícita de autovalores y autofunciones muestre via el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = L^{-1}\int_0^L f(x)g(x)dx.$$

que los autovalores son negativos, que el subespacio de las autofunciones a un valor fijo es unidimensional y que las autofunciones a distintos autovalores son ortogonales respecto del producto escalar.

b) Determine los autovalores y autofunciones explicitamente.

Problema 3: Demuestre las siguientes propiedades de la Transformada de Laplace

a) $\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = s\mathcal{L}(f) - f(0)$
$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

b) $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{\mathcal{L}(f(t))}{ds}$

c) $\mathcal{L}(\int_0^t f(t')dt') = s^{-1}\mathcal{L}(f(t))$.

d) Convolución: si $g(t) = \int_0^t K(t-t')f(t')dt'$ entonces $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(K)\mathcal{L}(f)$.

Problema 4: Una barra aislada semi-infinita que coincide con la parte positiva del eje x está inicialmente a temperatura cero. En t=0 se genera instantáneamente una cantidad de calor en el punto $x = a$, donde $a > 0$. Hallar la temperatura de cualquier punto de la barra en cualquier tiempo $t > 0$.

Problema 5: Un sólido semi-infinito $x > 0$ está inicialmente a la temperatura cero. En el tiempo $t = 0$ se le aplica y se le mantiene una temperatura constante $U_0 > 0$ en la cara $x = 0$. Hallar la temperatura de cualquier punto sólido en cualquier tiempo posterior $t > 0$.

Problema 6: Considere la ecuación de difusión unidimensional con fuentes y condiciones de borde generales.

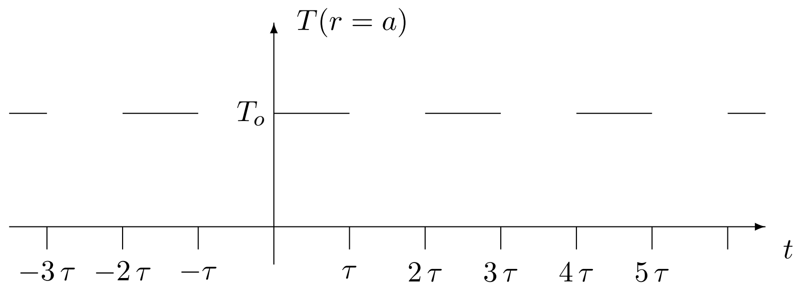
$$u_t = ku_{xx} + w, \quad 0 < x < L,\ t > 0;$$

$$u(0,t) = g(t),\ \ u(L,t) = h(t),\ \ t > 0.$$

a) Sumando una función adecuada de (x, t) muestre que este problema se reduce a un problema con condiciones de borde homogéneas.

b) Si ahora se impone también la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, obtenga la solución por el método de separación de variables.

Problema 7: La temperatura en una esfera homogénea de radio a obedece la ecuación de difusión $\nabla^2 T = (1/\kappa)(\partial T/\partial t)$, con κ constante. Por acciones externas, la temperatura de la superficie de la esfera es forzada a comportarse según lo ilustrado en la figura. Calcule la temperatura $T(t)$ en el centro de la esfera.



Las alteraciones se extienden para $t = \pm\infty$.

Problema 8: Probar que la ecuación de difusión

$$u_t = k u_{xx} \; (-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty)$$

cumple con las siguientes propiedades de invarianza.

a) La *traslación* $u(x - y, t)$ de una solución $u(x, y)$, también es solución.

b) Cualquier *derivada* $u_x(x, t)$, $u_t(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$, etc. de una solución $u(x, y)$, también es solución.

c) Una *combinación lineal* de soluciones, también es solución.

d) La *integral* de una solución de nuevo es solución. Es decir, si $S(x, t)$ es solución, también lo es

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) g(y) dy \,,$$

para cualquier función (linda para que la integral converja) $g(y)$.

Problema 9: Demuestre las siguientes propiedades de la Transformada de Fourier.

a) Si $g(t) = \dot{f}(t)$ entonces $\mathcal{F}(g) = i\omega \mathcal{F}(f)$. Si $g(t) = t f(t)$ entonces $\mathcal{F}(g) = i\omega \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(f)$.

b) $\mathcal{F}(f(t - t')) = \exp -i\omega t' \mathcal{F}(f(t))$.

c) Convolución: si $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t - t') f(t') dt'$ entonces $\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(S)\mathcal{F}(f)$.

d) Si $F = \mathcal{F}(f)$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$.

e) $F(f^*(t)) = F^*(-\omega)$.