Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 3 (20/04/17)

Problema 1: Resolver el problema de las oscilaciones transversales propias de una cuerda homogénea de longitud L si:

a) Los extremos de la cuerda están fijos rígidamente.

b) los extremos de la cuerda están libres. Es decir, $\frac{du}{dx} = 0$ en los extremos de la cuerda. Esto tiene lugar cuando los extremos de la cuerda están sujetos mediante anillos (de masas despreciables), que se deslizan sin rozamiento sobre barras paralelas.

c) Uno de los extremos está libre y el otro fijo.

Problema 2: Resolver la ecuación $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$, con las siguientes condiciones:

a) $u(x, 0) = 0$ y $u_t(x, 0) = \operatorname{sen}(x)$

b) $u(x, 0) = e^x$ y $u_t(x, 0) = \cos(x)$

Problema 3: En los instrumentos musicales de cuerda percutida (por ejemplo, el piano) las oscilaciones transversales de la cuerda tensa se generan mediante un golpe, que le da a la cuerda una velocidad inicial sin desviación inicial. Si el martillo percutor es plano, rígido y tiene un ancho 2δ, el perfil de velocidad inicial de la cuerda estará dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = \begin{cases} v_0 & \text{si } |x - x_0| < \delta \\ 0 & \text{si } |x - x_0| > \delta \,, \end{cases} \tag{1}$$

asumiendo que el martillo golpea a una distancia x_0 del extremo de la cuerda y que esta tiene un largo L.

a) Determine las oscilaciones de la cuerda $u(x, t)$ para todo $t > 0$, asumiendo que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (referirse al problema 1a)

b) Para la energía de la cuerda oscilando se tiene la expresión

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \rho (c^2 u_x^2 + u_t^2) dx,$$

donde la densidad $\rho = M/L$, si M es la masa de la cuerda. Muestre que, para condiciones iniciales generales, E adquiere la forma de una serie cuadrática en las amplitudes de los modos. Calcule la energía asociada con cada modo de oscilación o armónico. Particularice para la condición inicial indicada arriba.

c) Determine en qué puntos de la cuerda x_0 la percusión **no** excita el m-ésimo modo de oscilación. Para simplificar el cálculo haga la suposición razonable $\delta \ll L$.

d) Suponiendo $\delta \ll L$, determine cuál es el armónico que más resuena (es decir que posee mayor energía) si se percute la cuerda a una distancia x_0 de uno de sus extremos.

Problema 4: Encontrar las 3 frecuencias de oscilación más bajas de un parche de tambor en forma de triángulo isósceles recto de lados a, a y $a\sqrt{2}$.

Problema 5: Considere la ecuación de ondas en n dimensiones espaciales para una onda esférica $u(r,t)$

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r \right) ,$$

donde r es la coordenada radial y $(\partial^2/\partial r^2) + [(n-1)/r]\partial/\partial r$ la componente radial del Laplaciano en $\mathbb{R}^n$.
Intente obtener soluciones de la forma

$$u(r,t) = \alpha(r) f(t - \beta(r)).$$

Estas describen ondas esféricas cuya forma arbitraria f se propaga radialmente sin distorsión (como lo indica el factor $f(t-\beta(r))$) con función de "atraso" β, pero que están atenuadas (por el factor α). Muestre que esto es posible solamente en dimensiones espaciales $n = 1$ o $n = 3$. Muestre que en el caso unidimensional no hay atenuación.

Problema 6: Verifique que la ecuación de ondas tiene las siguientes propiedades:

a) La traslación espacial de una solución es solución.

b) Cualquier derivada parcial de una solución es solución.

c) La dilatación $(D_\lambda u)(\boldsymbol{x},t) := u(\lambda^{-1}\boldsymbol{x}, t/\lambda)$ de una solución u es solución.

d) La "rotación" espacial $(T_R u)(\boldsymbol{x},t) := u(R^{-1}\boldsymbol{x},t)$ de una solución u es una solución para toda transformación lineal $R : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ortogonal (esto es, en la base canónica, la matriz que la representa satisface $R^T R = \mathbb{I}$, donde R^T es la matriz transpuesta).