

Problema 1: Resuelva la ecuación de Laplace dentro de una región rectangular $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H$, con las siguientes condiciones de borde:

$$a) \quad u(0, y) = \sin\left(\frac{2\pi y}{H}\right), \quad u(L, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = 0$$

$$b) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad u(L, y) = 2y, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = 0$$

Problema 2: Encuentre la solución acotada de la ecuación $\Delta u = 0$ en el exterior de un disco de radio a sujeto a las condiciones de borde $u(a, \theta) = \ln 2 + 4 \cos(3\theta)$.

Problema 3: Encuentre aquella solución de la ecuación de Laplace en el interior del disco unitario de radio $r = 1$ que tenga valores en la frontera dados por

$$f(1, \phi) = \begin{cases} V_0 & 0 < \phi < \pi \\ 0, & \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

donde V_0 es una constante.

Problema 4: Un cilindro recto sólido semi-infinito de radio a mantiene su superficie curva a 0°C y su base a una temperatura T_0 . Encuentre la distribución de temperatura en el cilindro en el estado estacionario.

Problema 5: Considere una esfera metálica de radio unitario, con una condición de frontera:

$$U(1, \theta) = \begin{cases} U_0 & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases},$$

donde U_0 es una constante. Podemos dar a este problema, las siguientes interpretaciones (entre otras), para las cuales nos interesa conocer su solución:

- a) Suponga que la esfera es sólida y la condición de frontera representa una distribución de temperatura. Determine el estado estacionario.
- b) Suponga que la esfera es hueca y la condición de frontera representa una distribución de potencial electrostático. Encuentre el valor del potencial dentro y fuera de la esfera. En particular, determine el valor de la solución en el ecuador de la esfera ($\theta = \pi/2$).

Problema 6: Una esfera conductora, descargada de radio a se encuentra dentro de un campo electrostático uniforme de magnitud E . La esfera se sitúa en el origen de un sistema coordenado. El campo eléctrico uniforme, orientado según la dirección del eje polar, genera un potencial electrostático: $u = -Ez$, donde se toma arbitrariamente $u(z = 0) = 0$. Muestre que la esfera se comporta como un dipolo eléctrico.

Problema 7: Para un campo escalar ψ definido en \mathbb{R}^d sea

$$\bar{\psi}(r) := \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad r > 0,$$

el promedio de ψ en la esfera de radio $r > 0$ alrededor de $\mathbf{0}$. Aquí $|S_r|$ es el volumen ($(d-1)$ -dimensional) de la esfera de radio $r > 0$ dada por

$$|S_r| = \frac{2\pi^{d/2}r^{d-1}}{\Gamma(d/2)}.$$

Verifique que $\bar{\psi}(0) := \lim_{r \rightarrow 0} \bar{\psi}(r) = \psi(\mathbf{0})$.

Verifique que

$$\frac{d\bar{\psi}}{dr} = \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} (\nabla\psi) \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{|S_r|} \int_{B_r} \Delta\psi \, d\mathbf{x},$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ es la normal exterior a S_1 en $\mathbf{x} \in S_1$ y $B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| \leq r\}$ es la bola de radio r alrededor de $\mathbf{0}$.

Muestre que $\Delta\bar{\psi} = \bar{\Delta\psi}$ para $d = 1, 2$, y 3 calculando el promedio esférico $\bar{\Delta\psi}$ ¿Puede demostrar esto en dimensión d arbitraria?

Sugerencia: Determine $\frac{d^2\bar{\psi}}{dr^2}$.

Problema 8:

- a) Repita los cálculos realizados en clase para dimensiones mayores o iguales a 3 en el caso bi-dimensional para obtener la fórmula

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left[u(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n} \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right] ds$$

válida para una función armónica u en un abierto acotado $D \subset \mathbb{R}^2$ de borde suave ∂D . $\partial/\partial n$ denota la derivada direccional en la dirección normal exterior a D a lo largo de ∂D : $(\partial f/\partial n)(\mathbf{x}) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$; ds denota el elemento de línea a lo largo de ∂D .

- b) Determine la función de Green para el disco $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| \leq 1\}$ con condición de Dirichlet y recupere así la fórmula integral de Poisson.

Sugerencia: tenga en cuenta los resultados del problema anterior. Muestre que si f es continua sobre D entonces para $\mathbf{a} \in D$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B_r(\mathbf{a})|} \int_{B_r(\mathbf{a})} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = f(\mathbf{a}).$$

Recuerde que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ cualquiera sea $\alpha > 0$.

Problema 9: Determine la función de Green para el semi-espacio $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 > 0\}$ determinado por a, b , y c .