Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 5 (1/06/17)

Problema 1: Encuentre las funciones de Green y resuelva la siguiente ecuaciones:

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{4}y = \sin(2x); \quad y(0) = y(\pi) = 0.$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \alpha\dfrac{dy}{dx} = e^{-\beta x}$, para $x > 0$; $\alpha, \beta > 0$; $\quad y(0) = \dfrac{dy}{dx}(0) = 0.$

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{4}y = x; \quad y(0) = \alpha,\ y(\pi) = \beta.$

Problema 2: Considere la función "rampa"

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

Claramente $f(x)$ es continua pero no diferenciable (en el sentido clásico) en el punto $x = 0$. Encuentre las dos primeras derivadas de f en el sentido distribucional.

Problema 3: Encontrar la derivada generalizada de la siguiente funcion de período 2π

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Problema 4:

a) Sea x_0 la única solución la ecuación $g(x) = 0$ en el intervalo $a < x < b$ y $g'(x_0) \neq 0$, mostrar que

$$\int_a^b f(x)\,\delta(g(x))\,dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

b) A partir del resultado anterior, ver que

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|}$$

donde x_n son los ceros (todos aislados) de la función $g(x)$ en $-\infty < x < \infty$ y estos cumplen $g'(x_n) \neq 0$.

c) Muestre, usando el resultado anterior, que

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x + a) + \delta(x - a)}{2|a|},$$

relación muy usada en teoría de ondas lineales no dispersivas, en donde se tiene $\delta\left(t^2 - \frac{|\mathbf{x}|^2}{c^2}\right)$.

d) Evalúe la expresión

$$\int_0^\pi dx \int_1^2 dy\,\delta(\sin(x))\delta(x^2 - y^2)$$

Problema 5: Considere la función $x \mapsto x^2$ en la recta real como distribución y determine su transformada de Fourier.

Problema 6: A partir del problema de autovalores $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$, en el intervalo $[0, L]$ con condición de borde homogenea de Dirichlet y de Neuman respectivamente, muestre que

a)
$$\delta(x-\xi) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi\xi}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L}) \ , \quad 0 < x, \xi < L \ .$$

b)
$$\delta(x-\xi) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n\pi\xi}{L})\cos(\frac{n\pi x}{L}) \ , \quad 0 < x, \xi < L \ .$$

Problema 7: Resuelva el problema de autovalores del Laplaciano en el disco plano de radio 1 con condición de Neumann en el borde.

Problema 8: Suponga conocidos los autovalores $\{\lambda_n : n = 1, 2, \cdots\}$ y autofunciones $\{h_n : n = 1, 2, \cdots\}$ de $-\Delta$ en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de borde (suave). Use estos datos para resolver el problema de Cauchy (dato inicial) para la ecuación de difusión en Ω.

Problema 9: En la discusión de funciones de Green para la ec. de ondas en 3 dimensiones espaciales se afirmó que:

a) $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) = \dfrac{1}{4\pi c^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\delta(t - s - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/c)$ es la función de Green del problema

$$\Gamma_{tt} - c^2\Delta\Gamma = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta(t-s) \ , \quad \Gamma = \Gamma_t = 0 \ , \ t < s \ .$$

b) $R(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{1}{2\pi c}\delta(c^2t^2 - |\boldsymbol{x}|^2)\text{sgn}(t)$ (llamada función de Riemann) es la función de Green del problema

$$\Gamma_{tt} - c^2\Delta\Gamma = 0 \ , \quad \Gamma(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \ , \ \Gamma_t(\boldsymbol{x}, 0) = \delta(\boldsymbol{x}) \ . \tag{1}$$

Discuta cuál es la EDP que satisface la función

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, 0)\psi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

en el caso a) y la función

$$w(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} R(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, 0)\psi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

en el caso b). Suponga que ψ es una función de prueba.

Problema 10: Determine la solución distribucional de (1) en 2 dimensiones espaciales.