Funciones esféricas

G.A. Raggio*
Notas para Métodos Matemáticos de la Física II, 2015

1 de Mayo de 2015

El objetivo es determinar funciones armónicas en $\mathbb{R}^3$ que son producto de una función radial con una angular. En el camino se determina el espectro de la resticción de Laplaciano a la esfera $\mathcal{S}^2 := \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x} = 1\}$.

1. Separación de variables y las ODE

El Ansatz $u(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\Theta(\vartheta)\Psi(\varphi)$ y $\Delta u = 0$ conducen a

$$\Delta_o \Theta \Psi = -\lambda \Theta \psi \ , \quad R'' + 2r^{-1}R' - \lambda r^{-2} R = 0 \ ,$$

donde λ es una constante real y Δ_o es la restricción del laplaciano a la esfera $\mathcal{S}^2$ dada por

$$\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin(\vartheta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ .$$

La ecuación angular es equivalente entonces a las dos ODE

$$\Psi'' = \mu \Psi \ , \quad \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + \left(\frac{\mu}{\sin(\vartheta)^2} + \lambda \right) \Theta = 0 \ .$$

Las únicas soluciones 2π-periódicas de la primera son $\Psi(\varphi) = a\cos(m\varphi) + b\sin(m\varphi)$ con $m \in \mathbb{N}$ y entonces la segunda es

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} - \frac{m^2}{\sin(\vartheta)^2} \Theta = -\lambda \Theta \ .$$

La transformación de variables $x = \cos(\vartheta)$ conduce a $X(x) = \Theta(\arccos(x))$ y a la ODE

$$(1 - x^2)(d^2X/dx^2) - 2x(dX/dx) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) X = 0 \ .$$

*FaMAF-UNC; E-mail: raggio@famaf.unc.edu.ar

Usando teoría de funciones clásica se puede demostrar[1] que la única solución regular en $[-1,1]$ de esta ODE se obtiene para $\lambda = \ell(\ell+1)$ con $\ell \in \mathbb{N}$ y las soluciones correspondientes son proporcionales a

$$f_{\ell,m}(x) := (1-x^2)^{m/2}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell \ , \ \ m = -\ell, -\ell-1, \cdots, 0, 1, \cdots, \ell \ ;$$

Estas $2\ell+1$ funciones no son linealmente independientes ya que –como veremos– $f_{\ell,-m} \propto f_{\ell,m}$. Una normalzación conveniente de las $f_{\ell,m}$ conduce a las *funciones asociadas de Legendre*

$$P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{(-1)^m}{\ell!2^\ell}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell \ , \ \ m = 0, \pm 1, \cdots, \pm\ell \ ; \tag{1}$$

Estas funciones son polinomios de grado ℓ cuando m es par y sino el producto de $\sqrt{1-x^2}$ con un polinomio de grado $\ell-1$. Las funciones asociadas de Legendre tienen muchisimas propiedades conocidas y están tabuladas (ver [**?**]); hay que tener algúna precaución con la normalización y la notación de las fuentes que se consulten. El polinomio P_ℓ^0, que tiene grado ℓ, es igual al *polinomio de Legendre* de orden ℓ y se anota P_ℓ.

Desarrollamos ahora una representación integral de estas funciones. Si $-1 < x < 1$ y $\gamma := \{z(t) = x + i\sqrt{1-x^2}e^{it} : \ -\pi \le t \le \pi\}$ es la circunferencia de radio $\sqrt{1-x^2}$ en el plano complejo centrada en $z = x$, el Teorema de Cauchy indica que

$$(x^2-1)^\ell = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(z^2-1)^\ell}{(z-x)}\,dz \ ;$$

con la expresión (1) para las funciones asociadas de Legendre con orden $m \ge 0$, tenemos

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m(1-x^2)^{m/2}(\ell+m)!}{\ell!2^\ell 2\pi i}\oint_\gamma \frac{(z^2-1)^\ell}{(z-x)^{\ell+m+1}}\,dz$$

$$= \frac{(-1)^m(1-x^2)^{m/2}(\ell+m)!}{\ell!2^\ell 2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(x^2-(1-x^2)e^{i2t}+2i\sqrt{1-x^2}e^{it}-1)^\ell}{(i\sqrt{1-x^2}e^{it})^{\ell+m+1}}\,(-)\sqrt{1-x^2}e^{it}\,dt$$

$$= \frac{(-1)^m(\ell+m)!}{\ell!i^{\ell+m}2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-it}\frac{x^2-(1-x^2)e^{i2t}+2ix\sqrt{1-x^2}e^{it}-1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^\ell e^{-imt}\,dt$$

$$= \frac{(-1)^m(\ell+m)!}{\ell!i^{\ell+m}2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{-2\cos(t)(1-x^2)+2ix\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^\ell e^{-imt}\,dt$$

$$= \frac{i^m(\ell+m)!}{\ell!2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+i\cos(t)\sqrt{1-x^2}\right)^\ell e^{-imt}\,dt$$

$$= \frac{i^m(\ell+m)!}{\ell!\pi}\int_0^{\pi}\left(x+i\cos(t)\sqrt{1-x^2}\right)^\ell \cos(mt)\,dt \ .$$

[1]

Además, evaluando en $x = \pm 1$ obtenemos

$$P_\ell^0(\pm 1) = (\pm 1/2)^\ell \ , \quad P_\ell^m(\pm 1) = 0 \ , \ m \neq 0 \ .$$

Esto demuestra el siguiente resultado

Teorema 1

$$P_\ell^m(x) = \frac{i^m(\ell+m)!}{\ell!\pi} \int_0^\pi \left(x + i\cos(t)\sqrt{1-x^2}\right)^\ell \cos(mt)\, dt \ .$$

Observese que

$$P_\ell^{-m} = \frac{i^{-m}(\ell-m)!}{\ell!\pi} \int_0^\pi \left(x + i\cos(t)\sqrt{1-x^2}\right)^\ell \cos(mt)\, dt$$

$$= (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \frac{i^m(\ell+m)!}{\ell!\pi} \int_0^\pi \left(x + i\cos(t)\sqrt{1-x^2}\right)^\ell \cos(mt)\, dt \ ;$$

o sea

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x) \ . \tag{2}$$

2. Polinomios homogeneos

Consideramos polinomios homogeneos de grado $\ell = 0, 1, 2, \cdots$ en tres variables reales $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dados por

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=1 \ , \ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\ell}^{\ell} c_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ ,$$

donde los coeficientes $c_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ son complejos. Estos forman un espacio linear complejo $\mathcal{H}_\ell$. La dimensión de este puede calcularse a partir de la tabla

α_1	ℓ	$\ell-1$	$\ell-1$	$\ell-2$	$\ell-2$	$\ell-2$	$\cdot$	0	0	0	$\cdot$	0
α_2	0	1	0	2	1	0	$\cdot$	ℓ	$\ell-1$	$\ell-2$	$\cdot$	0
α_3	0	0	1	0	1	2	$\cdot$	0	1	2	$\cdot$	ℓ

y es $\sum_{j=1}^{\ell+1} j = (\ell+2)(\ell+1)/2$. Si $u \in \mathcal{H}_0$ entonces u es constante y $\Delta u = 0$; asimismo los $u \in \mathcal{H}_1$ son combinaciones lineales de x_1, x_2 y x_3 de modo que $\Delta u = 0$. Si $u \in \mathcal{H}_\ell$ con $\ell \geq 2$ entonces, $\Delta u \in \mathcal{H}_{\ell-2}$. Denotamos con $\mathcal{K}_\ell$ el nucleo de la restricción de Δ a $\mathcal{H}_\ell$. Ya que para $\ell \geq 2$

$$dim(\mathcal{H}_\ell) = dim(\mathcal{K}_\ell) + dim(\Delta(\mathcal{H}_\ell)) \leq dim(\mathcal{K}_\ell) + dim(\mathcal{H}_{\ell-2}) \ ,$$

tenemos

$$(3) \qquad dim(\mathcal{K}_\ell) \geq dim(\mathcal{H}_\ell) - dim(\mathcal{H}_{\ell-2}) = 2\ell + 1 \; .$$

Se tiene igualdad en los casos $\ell = 0$ y $\ell = 1$ y, en particular $\mathcal{K}_\ell$ no es vacio. Denotando con $\widehat{\boldsymbol{x}}$ al vector unitario $\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ cuando $0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, observamos que si $u \in \mathcal{K}_\ell$ se tiene

$$(4) \qquad u(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^\ell u(\widehat{\boldsymbol{x}}) \; ,$$

de modo que hemos encontrado armónicas que son productos de la función radial $\boldsymbol{x} \mapsto |\boldsymbol{x}|^\ell$ con una función angular $\mathcal{S}^2 \ni \widehat{\boldsymbol{x}} \mapsto u(\widehat{\boldsymbol{x}})$. Esta función angular es autofunción de la restricción Δ_o del Laplaciano a la esfera; en efecto si denotamos con $\widehat{u}$ la restricción de u a $\mathcal{S}^2$

Lema 1 *Si $u \in \mathcal{K}_\ell$ entonces $\Delta_o \widehat{u} = -\ell(\ell+1)\widehat{u}$.*

Demostración: Con $r := |\boldsymbol{x}|$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \Delta u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_o \right) r^\ell \widehat{u} \\ &= \ell(\ell-1)r^{\ell-2}\widehat{u} + 2\ell r^{\ell-2}\widehat{u} + r^{\ell-2}\Delta_o\widehat{u} = r^{\ell-2}(\ell(\ell+1)\widehat{u} + \Delta_o\widehat{u}) \; . \end{aligned}$$

□

Tomemos $u_j \in \mathcal{K}_{\ell_j}$ para $j = 1, 2$. Entonces la segunda identidad de Green aplicada en la bola $B_1 = B_1(\mathbf{0})$ dice

$$0 = \int_{B_1} (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) dv = \int_{S_1(\mathbf{0})} (u_1(\partial u_2/\partial r) - u_2(\partial u_1/\partial r) d\sigma \; ;$$

pero en $S_1(\mathbf{0}) = \mathcal{S}^2$ tenemos $\partial u_j/\partial r = \ell_j \widehat{u}_j$ de modo que

$$0 = (\ell_2 - \ell_1) \int_{\mathcal{S}^2} \widehat{u}_1 \, \widehat{u}_2 d\sigma \; ;$$

luego como $\overline{u}$ esta en $\mathcal{K}_\ell$ cuando u lo está, tenemos

Lema 2 *Si $u \in \mathcal{K}_\ell$ y $v \in \mathcal{K}_{\ell'}$ con $\ell \neq \ell'$ entonces*

$$\int_{\mathcal{S}^2} \overline{\widehat{u}} \, \widehat{v} \, d\sigma = 0 \; .$$

Para $k \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathcal{H}_\ell$, la función $\boldsymbol{x} \mapsto r^k u(\boldsymbol{x})$ pero no es un polinomio homogeneo cuando k es impar pero está en $\mathcal{H}_{\ell+k}$ si k es par[2]. Esto sugiere analizar los $[\ell/2] + 1$ subespacios $\mathcal{H}_{\ell,k} := \{\boldsymbol{x} \mapsto r^{2k}u(\boldsymbol{x}) : \, u \in \mathcal{K}_{\ell-2k}\}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, [\ell/2])$ de $\mathcal{H}_\ell$. Proveeemos a $\mathcal{H}_\ell$ con el producto escalar

$$(5) \qquad \langle u, v \rangle = \int_{\mathcal{S}^2} \overline{u(\widehat{\boldsymbol{x}})} \, v(\widehat{\boldsymbol{x}}) \, d\sigma \; .$$

[2] $r^{2p} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^p$ es polinomio homogeneo de grado $2p$. Y, claramente, el producto de dos polinomios homogeneos de cualquier grado es un polinomio homogeneo con la suma de esos grados como grado.

Lema 3 *Para $k, k' \in \{0, 1, \cdots, [\ell/2]\}$ con $k \neq k'$ se tiene que $\mathcal{H}_{\ell,k}$ y $\mathcal{H}_{\ell,k'}$ son subespacios ortogonales de $\mathcal{H}_\ell$. La dimensión de $\mathcal{H}_{\ell,k}$ es igual a la de $\mathcal{K}_{\ell-2k}$ y se tiene*

$$\mathcal{H}_\ell = \bigoplus_{k=0}^{[\ell/2]} \mathcal{H}_{\ell,k} \ .$$

La dimensión de $\mathcal{K}_j$ es $2j+1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

<u>Demostración</u>: Las funciones ϕ en $\mathcal{H}_{\ell,k}$ son de la forma $\phi(\boldsymbol{x}) = r^{2k} r^{\ell-2k} \widehat{u}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = r^\ell \widehat{u}(\widehat{\boldsymbol{x}})$ con $u \in \mathcal{K}_{\ell-2k}$ con lo cual queda aclarada la afirmación sobre las dimensiones. Si $k \neq k'$ y $\phi_1(\boldsymbol{x}) = r^\ell \widehat{u}(\widehat{\boldsymbol{x}})$ y $\phi_2(\boldsymbol{x}) = r^\ell \widehat{v}(\widehat{\boldsymbol{x}})$ con $\widehat{u} \in \mathcal{K}_{\ell-2k}$ y $v \in \mathcal{K}_{\ell-2k'}$ entonces

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_{\mathcal{S}^2} \overline{\widehat{u}(\widehat{\boldsymbol{x}})}\, \widehat{v}(\widehat{\boldsymbol{x}})\, d\sigma = 0$$

por el Lema 2.
Tenemos entonces que

$$\mathcal{H}_\ell \supset \bigoplus_{k=0}^{[\ell/2]} \mathcal{H}_{\ell,k} \ ;$$

de modo que

$$\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2} = dim(\mathcal{H}_\ell) \geq \sum_{k=0}^{[\ell/2]} dim(\mathcal{H}_{\ell,k}) = \sum_{k=0}^{[\ell/2]} dim(\mathcal{K}_{\ell-2k})$$

$$\geq \sum_{k=0}^{[\ell/2]} (2\ell - 4k + 1) = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2} \ ,$$

donde hemos usado la desigualdad (3) para obtener la segunda desigualdad. Pero entonces si para algún $k \in \{0, 1, 2, \cdots [\ell/2]\}$ se tuviere $dim(\mathcal{K}_{\ell-2k}) > 2\ell - 4k + 1$ obtendriamos una contradicción. Por lo tanto para todos estos k se tiene $dim(\mathcal{K}_{\ell-2k}) = 2\ell - 4k + 1$. Pero, cualquiera sea $j \in \mathbb{N}$, el sumando directo $\mathcal{K}_j$ aparece en la descomposición en suma directa de $\mathcal{H}_j$; esto muestra que $dim(\mathcal{K}_j) = 2j + 1$. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia del famoso Teorema de Weierstraß

Teorema 2 *El conjunto de las combinaciones lineales de $\{\widehat{u} : u \in \mathcal{K}_\ell \ , \ \ \ell \in \mathbb{N}\}$ es denso en el espacio de las funciones complejas continuas sobre $\mathcal{S}^2$ con respecto a la norma*

$$\|f\| := \max_{\widehat{\boldsymbol{e}} \in \mathcal{S}^2} |f(\widehat{\boldsymbol{e}})| \ .$$

<u>Demostración</u>: El Teorema de Weierstraß afirma que los polinomios p en las tres variables son densos. Pero si p es de grado n entonces $p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\ell=0}^n u_\ell$ donde $u_\ell \in \mathcal{H}_\ell$. Por el Lema 3, cada u_ℓ es suma finita de polinomios $r^{2k} u_{\ell,k}$ con $u_{\ell,k} \in \mathcal{K}_{\ell-2k}$ y $k = 0, 1, \cdots, [\ell/2]$. Pero

entonces la restricción de p a $\mathcal{S}^2$ es suma finita de funciones en algún $\mathcal{K}_j$. $\square$

Si consideramos a $C(\mathcal{S}^2)$ munido del producto escalar (5), y de la norma asociada

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}\ ,$$

entonces este espacio no es completo; pero existe un único espacio de Hilbert tal que $C(\mathcal{S}^2)$ es denso en este espacio con respecto a norma $\|\cdot\|_2$. Este espacio de Hilbert es denotado por $L^2(\mathcal{S}^2)$.

Teorema 3 *Las combinaciones lineales de* $\{\widehat{u} : u \in \mathcal{K}_\ell\ ,\ \ \ell \in \mathbb{N}\}$ *son densas en* $L^2(\mathcal{S}^2)$. *Si para cada* $\ell \in \mathbb{N}$, $\{Y_{\ell,-\ell+j} : j = 0, 1, \cdots, 2\ell\}$ *es una base ortonormal de* $\mathcal{K}_\ell$, *entonces* $\{Y_{\ell,-\ell+j} : \ell \in \mathbb{N}\ ,\ j = 0, 1, \cdots, 2\ell\}$ *es una base ortonormal de* $L^2(\mathcal{S}^2)$ *que diagonaliza a* Δ_o *pues* $\Delta_o Y_{\ell,-\ell+j} = -\ell(\ell+1)Y_{\ell,\ell+j}$ *para todo* $\ell \in \mathbb{N}$ *y todo* $j = 0, 1, \cdots, 2\ell$.

Demostración: Dada $f \in L^2(\mathcal{S}^2)$ y $\epsilon > 0$, hay $g \in C(\mathcal{S}^2)$ con $\|f - g\|_2 \leq \epsilon/2$ y hay h combinación de funciones $\widehat{u}$ con $u \in \mathcal{K}_\ell$ tal que $\|g - h\| \leq (\epsilon/8\pi)$. Entonces

$$\begin{aligned}\|f - h\|_2 &= \|f - g + (g - h)\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_{\mathcal{S}^2} |g(\widehat{\boldsymbol{x}}) - h(\widehat{\boldsymbol{x}})|\, d\sigma \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{8\pi}\int_{\mathcal{S}^2} d\sigma = \epsilon\ .\end{aligned}$$

El resto está claro. $\square$

LLamamos función esférica (de orden ℓ) a cualquier función $\widehat{u}$ con $u \in \mathcal{K}_\ell$.

2.1. Determinación de las funciones esféricas

Para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ y t real sea

$$\zeta(\boldsymbol{x}, t) := x_3 + ix_1\cos(t) + ix_2\sin(t)\ ,$$

tenemos

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, t) = i\cos(t)\ ,\ \ \frac{\partial\zeta}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}, t) = i\sin(t)\ ,\ \ \frac{\partial\zeta}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) = 1\ ;$$

de modo que si definimos

$$\phi_{\ell,m}(\boldsymbol{x}) := \int_{-\pi}^{\pi} (\zeta(\boldsymbol{x}, t))^\ell e^{imt}\, dt\ ,\ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\ ,\ \ \ell \in \mathbb{N}\ ,\ \ m \in \{0, \pm1, \cdots, \pm\ell\}\ ,$$

se satisface $\Delta\phi^{\pm}_{\ell,m} = 0$ cuando $\ell = 0$ o $\ell = 1$. Pero, también, para $\ell \geq 2$:

$$\frac{\partial^2\phi_{\ell,m}}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) = -\ell(\ell-1)\int_{-\pi}^{\pi} (\zeta(\boldsymbol{x}, t))^{\ell-2}\cos(t)^2 e^{imt}\, dt\ ,$$

$$\frac{\partial^2\phi_{\ell,m}}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) = -\ell(\ell-1)\int_{-\pi}^{\pi} (\zeta(\boldsymbol{x}, t))^{\ell-2}\sin(t)^2 e^{imt}\, dt\ ,$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{\ell,m}}{\partial x_3^2}(\boldsymbol{x}) = \ell(\ell-1)\int_{-\pi}^{\pi} (\zeta(\boldsymbol{x},t))^{\ell-2} e^{imt}\, dt\ ;$$

con lo cual $\Delta \phi^{\pm}_{\ell,m} = 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Observese que el mapa $\boldsymbol{x} \mapsto (\zeta(\boldsymbol{x},t))^{\ell}$ es un polinomio homogeneo de grado ℓ cuyos coeficientes son funciones (2π-periódicas) de t. Pero entonces, al integrar respecto de t se obtiene un polinomio homogeneo de grado ℓ; o sea que $\phi^{\pm}_{\ell,m} \in \mathcal{K}_{\ell}$. Restringiendonos a $\mathcal{S}^2$ tenemos

$$\phi_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\varphi)\cos(t) + \sin(\varphi)\sin(t)]^{\ell} e^{imt}\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\varphi - t)]^{\ell} e^{imt}\, dt = e^{im\varphi}\int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} [\cos(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\alpha)]^{\ell} e^{-im\alpha}\, d\alpha$$

ya que el integrando es 2π-periódico podemos reemplazar el intervalo de integración por cualquier intervalo de largo 2π; asi

$$\phi_{\ell,m}(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\alpha)]^{\ell} e^{-im\alpha}\, d\alpha$$

$$= 2e^{im\varphi}\int_{0}^{\pi} [\cos(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\alpha)]^{\ell} \cos(m\alpha)\, d\alpha\ .$$

La comparación con el Teorema 1, nos entrega que $\phi_{\ell,m}$ es proporcional a $e^{im\varphi}P_{\ell}^{m}(\cos(\vartheta))$. Renormalizando estas $\phi_{\ell,m}$ podemos escribir

$$\phi_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) = c_{\ell,m} e^{im\varphi} P_{\ell}^{m}(\cos(\vartheta))\ ; \tag{6}$$

y elegiremos las constantes $c_{\ell,m}$ para que $\phi_{\ell,m}$ esté normalizada. Ya que $\phi_{\ell,m}$ y $\phi_{\ell',m'}$ son ortogonales para $\ell \neq \ell'$ por el Lema 2, tenemos

$$\langle \phi_{\ell,m}, \phi_{\ell',m'}\rangle = \delta_{\ell,\ell'}\langle \phi_{\ell,m}, \phi_{\ell,m'}\rangle$$

$$= \overline{c_{\ell,m}}\, c_{\ell,m'}\delta_{\ell,\ell'}\int_0^{\pi} d\vartheta \sin(\vartheta) P_{\ell}^{m}(\cos(\vartheta)) P_{\ell}^{m}(\cos(\vartheta)) \int_0^{2\pi} e^{i(m'-m)\varphi\, d\varphi}$$

$$= 2\pi |c_{\ell,m}|^2\, \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}\int_{-1}^{1} [P_{\ell}^{m}(x)]^2\ dx\ .$$

El cálculo de la integral faltante da

$$\int_{-1}^{1} [P_{\ell}^{m}(x)]^2\ dx = \frac{2(\ell+m)!}{(2\ell+1)(\ell-m)!}\ .$$

Por lo tanto los *armónicos esféricos*[3]

$$Y_{\ell}^{m}(\vartheta,\varphi) := \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} e^{im\varphi} P_{\ell}^{m}(\cos(\vartheta))\ ,\quad \ell \in \mathbb{N}\ ,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \ell\ , \tag{7}$$

[3]¡Que no son funciones armónicas ya que $\Delta_o Y_{\ell}^{m} = -\ell(\ell+1)Y_{\ell}^{m} \neq 0$!

constituyen una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2(\mathcal{S}^2)$. Satisfacen

$$\Delta_o Y_\ell^m = -\ell(\ell+1)Y_\ell^m \ , \quad \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \varphi} = imY_\ell^m \ .$$

Se tiene:

1. $\overline{Y_\ell^m} = (-1)^m Y_\ell^{-m}$.
2. $Y_\ell^m(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$.
3. Si $\boldsymbol{x}$ es no nulo se tiene

$$Y_1^m(\vartheta, \varphi) = |\boldsymbol{x}|^{-1} \begin{cases} -(x_1 + ix_2)/\sqrt{2} & , \quad \text{si } m = 1 \\ x_3 & , \quad \text{si } m = 0 \\ (x_1 - ix_2)/\sqrt{2} & , \quad \text{si } m = -1 \end{cases} \ ,$$

   lo que define las llamadas *componentes esféricas* del vector $\boldsymbol{x}$.

4. Si $\widehat{\boldsymbol{x}}$ y $\widehat{\boldsymbol{y}}$ en $\mathcal{S}^2$ forman el ángulo agudo ϑ (o sea: $\widehat{\boldsymbol{x}} \cdot \widehat{\boldsymbol{y}} = \cos(\theta)$ con $0 \leq \vartheta \leq \pi$) entonces

$$P_\ell(\cos(\theta)) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y_\ell^m(\widehat{\boldsymbol{x}})} Y_\ell^m(\widehat{\boldsymbol{y}}) \ ; \tag{8}$$

   aquí $P_\ell = P_\ell^0$ es el polinomio de Legendre de grado ℓ.

5. $$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell j_\ell(|\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{x}|) \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y_\ell^m(\widehat{\boldsymbol{k}})} Y_\ell^m(\widehat{\boldsymbol{x}}) \ ;$$

   aquí j_ℓ es la función esférica de Bessel (de orden ℓ) dada por

$$j_\ell(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\ell+1/2}(z)$$

   donde J denota la función de Bessel (de primera especie).

3. ¿Y el problema original?

Queda entonces la determinación de las armónicas u que se separan

$$u(r, \widehat{\boldsymbol{r}}) = R(r)Y(\widehat{\boldsymbol{r}}) \ .$$

Con la información ganada, $Y = Y_\ell$ es una función esférica de orden $\ell \in \mathbb{N}$ arbitrario[4] y la ODE radial del apartado §1 es

$$r^2 R'' + 2rR - \ell(\ell+1)R = 0 \ ;$$

[4]Combinación lineal arbitaria $\sum_{m=-\ell}^{\ell} c_m Y_\ell^m$.

una ecuación de Euler con polinomio indicial $\alpha(\alpha+1)-\ell(\ell+1)$ cuyas raices son $\alpha=\ell$ y $\alpha=-\ell-1$. La segunda raíz conduce a una singularidad en $r=0$ de modo que las armónicas buscadas son

$$u_\ell(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|^\ell Y_\ell(\widehat{\boldsymbol{x}})\ ,$$

con $u_0(\mathbf{0})=1$ y $u_\ell(\mathbf{0})=0$ para $\ell>0$. Estas armónica especiales constituyen una familia muy rica de armónicas y podemos entonces plantear a una suma (o serie infinita) de ellas como armónica en un abierto acotado $V\subset\mathbb{R}^3$; los coeficientes correspondientes quedan determinados por el valor de la armónica en el borde ∂V. Esto conduce a un método para resolver el problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace (o de Poisson).

Las funciones $w_\ell(\boldsymbol{x}):=|\boldsymbol{x}|^{-\ell-1}Y_\ell(\widehat{\boldsymbol{x}})$ son armónicas en $\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$ y son todas en variables separadas. w_0 y w_1 son distribuciones y a las demás, se las puede tomar como distribuciones sobre las funciones C^∞ con soporte compacto fuera de $\{\mathbf{0}\}$.