# Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
# U.N.C.

## Métodos Matemáticos de la Física II

## Primer parcial – soluciones

**Problema 1:** Considere la ecuación diferencial

$$u_t - 2u_x = 3u + 2\ , \quad x, t > 0\ .$$

*a)* Determine la solución general de la ecuación. *Sugerencia:* Estudie transformaciones lineales de las variables.

*b)* Determine una solución del problema de Cauchy $u(x, 0) = \phi(x)$, $x \geq 0$ e intente discutir la unicidad de está solución.

*c)* ¿Se puede prescribir la funcion $0 < t \mapsto u(0, t)$ arbitrariamente al resolver el problema de Cauchy anterior?

*Solución:*

*a)* Definimos nuevas variables $\xi := ax + bt$, $\eta := \alpha x + \beta t$ –con $a, \alpha, b, \beta$ constantes– pidiendo que $a\beta - \alpha b \neq 0$ de modo que la transformación sea invertible. Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x} = a\frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha\frac{\partial}{\partial \eta}\ , \quad \frac{\partial}{\partial t} = b\frac{\partial}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial}{\partial \eta}\ ;$$

de modo que (sin distinguir a $u$ como función de $(x, t)$ de $u$ como función de $(\xi, \eta)$)

$$3u + 2 = (b - 2a)u_\xi + (\beta - 2\alpha)u_\eta\ .$$

Esta ec. se simplifica a una ec. diferencial ordinaria si $b - 2a = 0$ o $\beta - 2\alpha = 0$. Elegimos la primera variante $b = 2a$ y la condición $0 \neq a\beta - \alpha b = a(\beta - 2\alpha)$ impone que $a \neq 0$ y $\beta \neq 2\alpha$. Por ejemplo, $a = \alpha = \beta = 1$, $b = 2$

$$\xi = x + 2t\ , \quad \eta = x + t\ .$$

Entonces

$$-u_\eta = 3u + 2\ ,$$

y la solución $u_o(\xi, \eta) = -2/3$ es evidente. La ec. homogenea correspondiente $y_\eta = -3y$ es separable y se integra a

$$y(\xi, \eta) = g(\xi)e^{-3\eta}\ ,$$

donde $g$ es una función arbitraria por ahora. Entonces $u(\xi, \eta) = y(\xi, \eta) - 2/3$ es la solución general. Pasando a las variables originales

$$u(x, t) = -2/3 + e^{-3(x+t)}g(x + 2t)\ ,$$

y $g$ ha de ser diferenciable para que esta sea la solución de la ED dada.

Comentario: Podriamos haber resuelto con $0 \neq a = 2b$ y $\alpha \neq 2\beta$ arbitrarios y hubieramos llegado al mismo resultado. ¡Verifiquelo!

*b)* Tenemos

$$\phi(x) = u(x,0) = -2/3 + e^{-3x} g(x) \iff g(x) = e^{3x}(\phi(x) + 2/3) \ .$$

Por lo tanto

$$u(x,t) = e^{3t}\phi(x+2t) + \frac{2(e^{3t}-1)}{3} \ . \tag{1}$$

Ya subrayamos que la expresión obtenida en a) para $u$ es la solución general. Ésta está "parametrizada" por la función $g$ que acabamos de determinar. Esto implica que la solución al problema de Cauchy es única.

Variante: Si $v(x,t)$ es otra solución entonces $w := u - v$ satisface la ec. diferencial $w_t - 2w_x = 3w$, $w(x,0) = 0$. Esto expresado en variables $(\xi, \eta)$ se transforma en $-w_\eta = 3w$, $w(\xi, 0) = 0$ de donde $w \equiv 0$.

*c)* La respuesta es no ya que tomando la solución única del problema de Cauchy dada por (1) tenemos $u(0,t) = e^{3t}\phi(2t) + 2(e^{3t}-1)/3$.

**Problema 2:** Una barra de longitud $L$ posee una distribución de temperatura $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$. En el tiempo $t = 0$ se le aplica y se le mantiene una temperatura constante $T_1 > 0$ en la cara $x = 0$ y una temperatura $T_2 > 0$ en la cara $x = L$. Hallar la temperatura de cualquier punto de la barra para cualquier tiempo $t > 0$. ¿Que se obtiene en los bordes? Interprete.

*Solución:* Se busca resolver

$$u_t = k u_{xx} \ (t > 0 \ , \ \ 0 < x < L) \ , \ \ u(0,t) = T_1 \ , \ \ u(L,t) = T_2 \ , \ \ u(x,0) = \lambda x \ (0 \le x \le L) \ .$$

Primeramente homogenizamos las condiciones de borde. Con

$$v(x,t) := u(x,t) - (x/L)T_2 - (1 - (x/L))T_1 = u(x,t) - T_1 + \frac{T_1 - T_2}{L} x$$

tenemos $v_t = u_t$ y $v_{xx} = u_{xx}$ de modo que nuestro problema se transforma en

$$v_t = k v_{xx} \ , \ \ t > 0 \ , \ \ 0 < x < L \ , \tag{2}$$

con

$$v(0,t) = v(L,t) = 0 \ , \tag{3}$$

y

$$v(x,0) = \lambda x - T_1 + \frac{T_1 - T_2}{L} x =: \varphi(x) \ , \ \ 0 \le x \le L \ . \tag{4}$$

Aquí no hay dudas sobre el procedimiento. Buscamos las soluciones en variables separadas de (2) con (3). Del Ansatz $v(x,t) = X(x)T(t)$ obtenemos $XT' = kX''T$, $X(0) = X(L) = 0$ de donde llegamos a

$$X'' = \alpha X \ , \ \ X(0) = X(L) = 0 \ , \ \ T(t) = e^{\alpha k t} \ ,$$

de modo que $\alpha$ es una autovalor del problema espacial. A priori (ver clases) sabemos que $\alpha < 0$ de modo que $X_\alpha(x) = a\cos(\sqrt{|\alpha|}\,x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{|\alpha|}\,x)$; las condiciones de borde implican que $a = 0$ y que $b \neq 0$ y $\mathrm{sen}(\sqrt{|\alpha|}\,L) = 0$ de modo que $\sqrt{|\alpha|} = n\pi/L$ con $n = 1, 2, \cdots$. Los autovalores son entonces $\{-n^2\pi^2/L^2 : n = 1, 2, \cdots\}$ y las correspondientes autofunciones múltiplos de $f_n(x) := \mathrm{sen}(n\pi x/L)$. Las únicas soluciones en variables separadas de (2,3) son $f_n(x)e^{-(n\pi/L)^2kt}$. Planteamos que

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n f_n(x) e^{-(n\pi/L)^2kt} \ ,$$

con coeficientes $c_n$ a determinar. Formalmente,

$$\varphi(x) = v(x,0) = \sum_{n\geq 1} c_n u_n(x)$$

que establece a los coeficientes $c_n$ como los coeficientes de Fourier de la extensión impar de la función $\varphi$ al intervalo $[-L, L]$. Por lo tanto[1]

$$c_n = (1/L)\int_{-L}^{L} \varphi(x)\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)\,dx = (2/L)\int_0^L \varphi(x)\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)\,dx = \ .$$

Para calcular el coeficiente

$$(2/L)\int_0^L \mathrm{sen}(n\pi x/L)\,dx = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & , & n \text{ par} \\ 2 & , & n \text{ impar} \end{array}\right. \ ;$$

$$(2/L)\int_0^L x\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)\,dx = (2/L)\left[(-)\frac{x\cos(n\pi x/L)}{n\pi/L} + \int_0^L \cos(n\pi x/L)\,dx\right] = -(2/L)(-1)^n \ .$$

De modo que

$$c_n = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{2L}{n\pi}\left(\lambda - \dfrac{T_1 + T_2}{L}\right) & , & n \text{ impar} \\ -\dfrac{2L}{n\pi}\left(\lambda + \dfrac{T_1 - T_2}{L}\right) & , & n \text{ par} \end{array}\right. \ .$$

Asi llegamos a

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)e^{-(n\pi/L)^2kt} + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \ . \tag{5}$$

La convergencia en (5) es puntual en todo $[0, L]$ con $u(0,t) = T_1$ y $u(L,t) = T_2$ para todo $t \geq 0$. Hay entonces una discontinuidad en los bordes a tiempo $t = 0$ en la medida que

$$u(0,0) = T_1 \neq \lambda\,0 \ , \quad u(L,0) = T_2 \neq \lambda\,L \ .$$

[1]Las funciones $\{f_n : n \geq 1\}$ constituyen un sistema ortonormal si consideramos el producto escalar $\langle f, g\rangle = (1/2L)\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,dx$ :

$$(2/L)\int_0^L \mathrm{sen}(n\pi x/L)\ \mathrm{sen}(k\pi x/L)\,dx = \delta_{n,k} \ .$$

Es notable que $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_1 + \frac{T_2-T_1}{L}x$ que es la solución de la versión estacionaria del problema o sea

$$u_t = 0 = u_{xx}\ ,\quad u(0,t) = T_1\ ,\quad u(L,t) = T_2\ . \tag{6}$$

*Sobre la convergencia de (5):* Tenemos

$$|c_n e^{-(n\pi/L)^2 kt}| = \frac{ae^{-n^2bt}}{n}$$

donde $a, b$ son constantes positivas independiente de $x, t$ y $n$. Una aplicación del criterio de convergencia del cociente muestra que la serie (5) es uniformemente convergente en $[0, L]$ para todo $t > 0$ fijo. Luego se ve ($0 < t \mapsto e^{-n^2bt}$ es estrictamente decreciente para $b > 0$) que es uniformemente convergente en $[0, L] \times [t_o, \infty)$ para todo $t_o > 0$. Podemos derivar (5) término a término para obtener las derivadas de $u$ siempre que $t > 0$. En $t = 0$ la convergencia es puntual pero no uniforme cerca de $x = 0$ y de $x = L$.

*Secuela metodológica:* Es natural (para un físico) preguntarse muy al principio si no hay una solución estacionaria (por independiente del tiempo) y la respuesta es inmediatamente: ¡Si!. Con (6), $u$ debe ser una recta $u(x,t) = ax + b$ con $T_1 = u(0) = b$ y $T_2 = aL + T_1$ o sea

$$u_o(x) = [(T_2 - T_1)/L]x + T_1\ .$$

Pero entonces $v(x,t) = u(x,t) - u_o(x)$ es solución del mismo problema de contorno pero con condiciones de borde de Dirichlet homogeneas, etc. etc. Si bien hay muchas maneras de lograr que $v = u - f$ nos lleve a condiciones de borde homogeneas[2], la más natural es $f = u_o$.

**Problema 3:** La ecuación

$$u_t = \gamma u_{xx} - \alpha u$$

con coeficientes $\gamma$ y $\alpha$ positivos, se usa para modelar la transmisión de señales en un cable o, también, la actividad eléctrica en neuronas.

*a)* Muestre que $u(x,t) = e^{-\alpha t}\xi(x,t)$ es la solución general donde $\xi$ es solución de la ec. de difusión con el mismo coeficiente $\gamma$.

*b)* Determine $u(x,t)$ para $x > 0$ y $t > 0$ si $u(x,0) = e^{-\beta x}$ con $\beta > 0$ y $u$ satisface una condición de Neumann $u_x(0,t) = 0$ para $t > 0$.

*Solución:*

*a)* Con $u = e^{-\alpha t}\xi$ tendremos $u_t = -\alpha u + e^{-\alpha t}\xi_t$ y $u_{xx} = e^{-\alpha t}\xi_{xx}$ de modo que la ec. diferencial nos entrega $e^{-\alpha t}\xi_t = \gamma e^{-\alpha t}\xi_{xx}$ que es equivalente a

$$\xi_t = \gamma\, \xi_{xx}\ . \tag{7}$$

[2] la ec. diferencial correspondiente sería, en general, inhomogenea.

*b)* La condición de Neumann para $u$ es equivalente a $e^{-\alpha t}\xi_x(0,t) = 0$ que es equivalente a $\xi_x(0,t) = 0$. Debemos resolver el problema (7) con

$$\xi_x(0,t) = 0 \ . \tag{8}$$

Lo intentamos con una transformación de Laplace respecto de $t > 0$

$$y(x,s) := \int_0^\infty e^{-st}\xi(x,t)\, dt \ .$$

Entonces, de (7) y la condición de Neumann obtenemos

$$sy - e^{-\beta x} = \gamma y_{xx} \ , \ \ y_x(0,s) = 0 \ .$$

Ésta es una ec. diferencial ordinaria (respecto de $x$), lineal e inhomogenea con condición de borde de Neumann homogenea y coeficientes parametrizados por $s$. Dos soluciones de la corresp. ec. homogenea son

$$\phi_\pm(x,s) = e^{\pm\sqrt{s/\gamma}x}\ {}^{3}$$

Buscamos una solución particular y ya que la exponencial es su propia derivada planteamos

$$y_o(x,s) = c(s)e^{-\beta x} \ ,$$

de modo que

$$\gamma\beta^2 c = sc - 1$$

o sea

$$y_o(x,s) = \frac{e^{-\beta x}}{s - \gamma\beta^2} \ , \ \ s \neq \gamma\beta^2 \ .$$

Cuando $s = \gamma\beta^2$, una solución particular es

$$y_o(x,\gamma\beta^2) = \frac{xe^{-\beta x}}{2\gamma\beta} \ .$$

Entonces

$$a(s)e^{-\sqrt{s/\gamma}\,x} + b(s)e^{\sqrt{s/\gamma}\,x} + y_o(x,s)$$

es la solución general. Pero buscamos una solución $u$ al problema que sea acotada: $|u(x,t)| \leq K$. En este caso

$$|y(x,s)| \leq \left| \int_0^\infty e^{-st+\alpha t}u(x,t)\, dt \right| \leq K/(s-\alpha) \ , \ \ s > \alpha \ .$$

Rechazamos entonces la exponencial $e^{\sqrt{s}\,x}$ y obtenemos

$$y(x,s) = a(s)e^{-\sqrt{s/\gamma}\,x} + y_o(x,s) \ .$$

[3]el Wronskiano correspondiente es $W_{\phi_+,\phi_-}(x,s) = -2\sqrt{s/\gamma}$.

Ahora

$$y_x(0,s) = \begin{cases} -\sqrt{s/\gamma}\,a(s) - \beta c(s) & , \quad s \neq \gamma\beta^2 \\ -\beta a(s) + 1/(2\gamma\beta) & , \quad s = \gamma\beta^2 \end{cases}$$

de donde

$$a(s) = \begin{cases} -\frac{\beta\sqrt{\gamma}}{\sqrt{s}(s-\gamma\beta^2)} & , \quad s \neq \gamma\beta^2 \\ \frac{1}{2\gamma\beta^2} & , \quad s = \gamma\beta^2 \end{cases} \quad ,$$

y

$$y(x,s) = \frac{-\beta\sqrt{\gamma}\,e^{-\sqrt{s/\gamma}\,x}}{\sqrt{s}(s-\gamma\beta^2)} + \frac{e^{-\beta x}}{s-\gamma\beta^2} = \frac{1}{s-\gamma\beta^2}\left(\frac{\sqrt{s/\gamma}e^{-\beta x} - \beta e^{-\sqrt{s/\gamma}\,x}}{\sqrt{s/\gamma}}\right) \ , \ \ s \neq \gamma\beta^2 \ ,$$

$$y(x,s) = \frac{1}{2\gamma\beta^2}e^{-\beta x} + \frac{x}{2\gamma\beta}e^{-\beta x} \ , \ \ s = \gamma\beta^2 \ .$$

LLamando $\Psi(x,s)$ a la función entre paréntesis en la expresión para $y$ cuando $s \neq \gamma\beta^2$,

$$\Psi(x,s) = \frac{\sqrt{s/\gamma}e^{-\beta x} - \beta e^{-\sqrt{s/\gamma}\,x}}{\sqrt{s/\gamma}} \ ,$$

observamos que $\Psi(x,\gamma\beta^2) = 0$ y que

$$\lim_{s\to\gamma\beta^2} \frac{\partial\Psi(x,s)}{\partial s} = \frac{1}{2\gamma\beta^2}e^{-\beta x} + \frac{x}{2\gamma\beta}e^{-\beta x} = y(x,\gamma\beta^2) \ ;$$

de modo que, por la regla de l'Hôspital,

$$y(x,s) = \frac{\Psi(x,s)}{s-\gamma\beta^2} \tag{9}$$

tomando el límite correspondiente en $s = \gamma\beta^2$.

Lo que resta es la inversión de la transformación de Laplace. ¡Y esto es no trivial en este caso! Ya que $y$ –dada por (9)– es producto de dos funciones de $s$, es sugestivo usar la fórmula de transformación de una convolución[4] pero el problema es que uno de los factores no es transformada de Laplace de algo. Si bien para $a > 0$,

$$\left\{\mathcal{L}(e^{-at})\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt = 1/(s+a) \ ,$$

la función $e^{at}$ para $a > 0$ no admite transformada de Laplace. Es más: no hay ninguna función $f$ definida en $(0,\infty)$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) = 1/(s-a)$$

[4]De cualquier tabla (e.g. Abramowitz & Stegun, p. 1020)

$$e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \ , \ a < 0 \ ; \quad \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} \ .$$

para $a > 0$. Entonces, como el factor $1/(s-\gamma^2\beta)$ no admite anti-transformada de Laplace, no podemos usar la fórmula de convolución para calcular la anti-transformada de $y$.

Volveremos sobre este problema más adelante en el curso.

**Problema 4:** Considere el problema $\Delta u = 0$ en un disco plano de radio $a$ con la condición de borde $u_r(a,\theta) = f(\theta)$. $(r,\theta)$ son las coordenadas polares naturales. Muestre que para que el problema tenga solución se debe cumplir

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = 0 \; .$$

*Solución:* Si $D_a$ denota el disco, i.e. $D_a = \{r(\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta)) : \; 0 \leq r \leq a \; , \; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, el borde $\partial D_a$ es la circunferencia de radio $a$. Por el teorema de Gauss (o de la divergencia)[5]

$$0 = \int_{D_a} (\Delta u)\, dv = \int_{\partial D_a} (\nabla u) \cdot \boldsymbol{n} d\sigma$$

donde $\boldsymbol{n}$ es la normal exterior al disco dada por $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r = (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta))$. Ahora,

$$(\nabla u) \cdot \boldsymbol{n} = \cos(\theta)(\partial u/\partial x) + \mathrm{sen}(\theta)(\partial u/\partial y) = (\partial u/\partial r) \; .$$

De modo que

$$0 = \int_{\partial D_a} u_r(a,\theta)\, a\, d\theta = a \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$$

de donde se desprende el resultado ya que $a > 0$.

*Apéndice (G. Dotti). Solución directa de 3b) por el método de separación de variables*

Atacamos el problema (7) & (8) con la idea del método de separación de variables. Las soluciones en variables separadas serían $\zeta(x,t) = X(x)T(t)$. Esto nos da

$$\frac{T'}{T} = \gamma \frac{X''}{X} = k$$

Si $k = 0$, $X$ sería una recta pero la condición de borde implica que la pendiente correspondiente se anula de modo que $X_0(x) = c$. Si $k > 0$ las soluciones $X_k$ son superposiciones

[5] O el Teorema de Green planar (que es caso especial del Teorema de Stokes):

$$\int_{\partial D_a} [L dx + M dy] = \int_{D_a} [(\partial M/\partial x) - (\partial L/\partial y)]\, dx\, dy$$

tomando $M = (\partial u/\partial x)$ y $L = -(\partial u/\partial y)$ de modo que el miembro izq. es $a \int_0^{2\pi} (\partial u/\partial r)\, d\theta$y el derecho es el Laplaciano de $u$ integrado sobre $D_a$.

de $\cosh(\sqrt{k/\gamma}x)$ y de $\sinh(\sqrt{k/\gamma}x)$ pero ambas funciones son asintóticas a $e^{\sqrt{k/\gamma}x}$ para $x \to \infty$ y por ende no son acotadas. La constante $k$ debe ser negativa o nula y entonces

$$T \propto e^{kt} \quad X \propto \cos\left(\sqrt{\frac{-k}{\gamma}}x\right)$$

donde descartamos la solución $X \propto \operatorname{sen}(\sqrt{-k/\gamma}x)$ (para $k \neq 0$) por no satisfacer la condición de borde $X'(x=0) = 0$. Por lo tanto la solución general de la ED con la condición de borde dada es una "combinación lineal"de

$$\zeta_k(x,t) = B(k)e^{kt}\cos\left(\sqrt{\frac{-k}{\gamma}}x\right)$$

sobre $k \in (-\infty, 0]$. Si reparametrizamos $k = -\gamma\omega^2$, con $\omega \in [0,\infty)$ resulta

$$e^{kt}\cos\left(\sqrt{\frac{-k}{\gamma}}x\right) = e^{-\gamma\omega^2 t}\cos(\omega x),$$

y la solución general será una "combinación lineal"sobre los $\omega > 0$:

$$\xi(x,t) = \int_0^\infty A(\omega)\; e^{-\gamma\omega^2 t}\cos(\omega x)\; d\omega$$

Evaluando en $t = 0$ :

$$e^{-\beta x} = \int_0^\infty A(\omega)\; \cos(\omega x)\; d\omega\; .$$

Esto sugiere que $A$ está relacionada con la transformada de Fourier de la extensión par a $\mathbb{R}$ de la función $[0,\infty) \ni x \mapsto e^{-\beta x}$. Veamos: tomemos cualquier función $f$ que sea par, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-ikx}f(x)\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-ikx}f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (e^{-ikx}+e^{ikx})f(x)\,dx = \sqrt{2/\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(kx)\,dx\;,\end{aligned}$$

que es a su vez una función par. Por la fórmula de inversión y el mismo cálculo recién hecho

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\widehat{f}(k)\,dk = \sqrt{2/\pi}\int_0^\infty \widehat{f}(k)\cos(kx)\,dk\;.$$

Deducimos que, efectivamente,

$$A(\omega) = \sqrt{2/\pi}\;\left\{\mathcal{F}[e^{-\beta|x|}]\right\}(\omega)\;,$$

que calculamos ahora.

$$\mathcal{F}\left[e^{-\beta|x|}\right](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta|x|}e^{i\omega x}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Re\left(\int_0^\infty e^{(i\omega-\beta)x}dx\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\;.$$

Entonces obtenemos la solución buscada

$$\xi(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\; e^{-\gamma\omega^2 t}\cos(\omega x)\; d\omega\ ;$$

o sea

$$u(x,t) = \frac{2e^{-\alpha t}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\; e^{-\gamma\omega^2 t}\cos(\omega x)\; d\omega\ ;$$

Para establecer contacto con la solución obtenida por transformada de Laplace, calculemos la transformada de nuestra solución intercambiando límites:

$$y(x,s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\;\cos(\omega x)\int_0^\infty e^{-(s+\gamma\omega^2)t}\; dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\;\frac{\cos(\omega x)}{s+\gamma\omega^2} d\omega\ .$$

La integral es visiblemente proporcional a la anti-transformada de Fourier de las dos funciones pares $\omega \mapsto 1/(\beta^2+\omega^2)$ y $\omega \mapsto \omega \mapsto 1/((s/\gamma)^2+\omega^2)$ de modo que podemos usar la relacion para la transformada de una convolución. Ya conocemos $\mathcal{F}^{-1}[1/(a^2+\omega^2)]$ y haciendo la convolución prestando atención a los factores $\sqrt{2\pi}$ recuperamos

$$y(x,s) = \frac{1}{s-\gamma\beta^2}\left(\frac{\sqrt{s/\gamma}e^{-\beta x} - \beta e^{-\sqrt{s/\gamma}\,x}}{\sqrt{s/\gamma}}\right)\ .$$