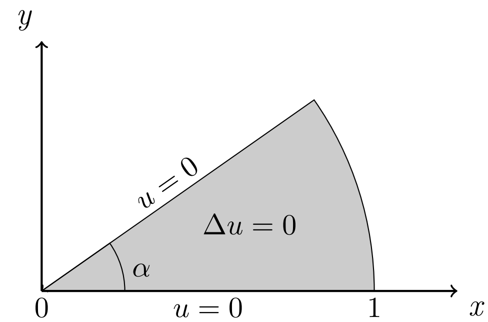
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Segundo parcial (13/06/17) – Soluciones[1]

Problema 1: *(Examen final del 29 de julio de 2015)* Resolver la ecuación de Laplace $\Delta u(r,\theta) = 0$ dentro de una región en forma de cuña con las condiciones de borde tal como muestra la figura y $u(1,\theta) + u_r(1,\theta) = -\theta$ para $0 \leq \theta \leq \alpha$.



Solución: Observamos que hay una discontinuidad en las condiciones de borde ya que

$$u(1,\theta) + u_r(1,\theta) = -\theta$$

mientras que

$$u(r,\alpha) + u_r(r,\alpha) = 0\ , \quad 0 \leq r < 1$$

de modo que

$$\lim_{r\to 1} \left(u(r,\alpha) + u_r(r,\alpha)\right) = 0 \neq -\alpha = \left(u(1,\alpha) + u_r(1,\alpha)\right)\ .$$

Buscamos resolver por el método de variables separadas.

Se buscan las soluciones en variables separadas $u(r,\theta) = R(r)X(\theta)$. Estas están determinadas por las ec. ordinarias

$$X'' = \lambda X\ , \quad R'' + r^{-1}R' + \lambda r^{-2}R = 0\ .$$

Incorporando la condición de borde en $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$, el problema de autovalores

$$X'' = \lambda X\ , \quad X(0) = X(\alpha) = 0\ ,$$

tiene autovalores $\lambda_n = -(n\pi/\alpha)^2$ $(n = 1, 2,)$ negativos con autofunciones $X_n(\theta) = \sin(n\pi\theta/\alpha)$.

La ec. radial

$$r^2R'' + rR'' - (n\pi/\alpha)^2 R = 0$$

es una ec. de Euler con soluciones $R_\pm(r) = r^{\pm n\pi/\alpha}$. Se rechaza la solución R_- por ser singular en $r = 0$.

El Ansatz

$$u(r,\theta) = \sum_{n\geq 1} a_n r^{n\pi/\alpha} \sin(n\pi\theta/\alpha) \tag{1}$$

[1] G.A.R.

cumple (formalmente) con $u(r,0) = u(r,\alpha) = 0$. Derivando término a término respecto de r y insertando en la condición de borde en $r = 1$, obtenemos

$$\sum_{n\geq 1} a_n(1 + (n\pi/\alpha)) \sin(n\pi\theta/\alpha) = -\theta \ , \tag{2}$$

que es la serie de Fourier de la función impar $-\theta$ definida en el intervalo $[-\alpha, \alpha]$ (pero claro restringida al intervalo $[0, \alpha]$). Los coeficientes se determinan vía

$$-a_n(1 + (n\pi/\alpha)) = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha \theta \sin(n\pi\theta/\alpha)\, d\theta \ .$$

La convergencia de la serie de Fourier (2) es puntual (no uniforme) en $[0, \alpha)$.

La integral que determina los coeficientes puede hacerse inmediatamente (por ejemplo por partes) para obtener

$$a_n = \frac{2\alpha^2(-1)^n}{n\pi(\alpha + n\pi)} \ , \quad n \geq 1 \ .$$

Tenemos

$$|a_n| \leq \frac{2(\alpha/\pi)^2}{n^2}$$

y, ya que la serie infinita $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ es convergente y $|r^{n\pi/\alpha}| \leq 1$ para $0 \leq r \leq 1$, deducimos que la serie (1) es absolutamente y uniformemente convergente lo que a posteriori valida la operación de derivar término a término respecto de r allí donde la derivada existe (i.e., fuera de $r = 1$ y $\theta = \alpha$).

Problema 2: Si T es una distribución y g una función (suave) la distribución producto $gT = Tg$ se define como

$$(gT)(f) := T(gf) \ .$$

a) Muestre que $(gT)' = gT' + g'T$.

Sean $\delta(x)$ y $H(x)$ la delta de Dirac y la función escalón de Heaviside, respectivamente, demuestre que:

b) $\sin(ax)\delta'(x) = -a\,\delta(x)$.

c) $\frac{d^2}{dx^2}\left[H(x)\sin(ax)\right] = a\delta(x) - a^2 H(x)\sin(ax)$

Solución:

a) Por la definición de la derivada de una distribución, y la de la multiplicación,

$$(gT)'(f) = -(gT)(f') = -T(gf') = -T(gf' + g'f - g'f)$$

$$= -T((gf)') + T(g'f) = T'(gf) + (g'T)(f) = (gT')(f) + (g'T)(f) = [gT' + g'T](f) \ .$$

La regla de Leibniz (o del producto) puede entonces transferirse a la funciones generalizadas siempre y cuando uno de los factores sea una función (suave). Si t es la función generalizada tal que

$$T(f) = \int t(x)f(x)\, dx \ ,$$

entonces a T' le corresponde la función generalizada t' ya que

$$T'(f) = -\int t(x)f'(x)\,dx = \int t'(x)f(x)\,dx \;;$$

y a (gT) le corresponde la función generalizada gt ya que

$$(gT)(f) = T(gf) = \int t(x)g(x)f(x)\,dx \;.$$

Entonces, efectivamente,

$$(gt)' = g't + gt' \;.$$

b) Hay básicamente dos variantes de cálculo. Con distribuciones, usando la regla de Leibniz y la consecuencia inmediata de la definición de la multiplicación $g\delta = g(0)\delta$. Entonces,

$$g\delta' = (g\delta)' - g'\delta = (g\delta)' - g'(0)\delta \;;$$

luego

$$(g\delta')(f) = (g\delta)'(f) - g'(0)\delta(f) = -(g\delta)(f') - g'(0)\delta(f) = -g(0)\delta(f') - g'(0)\delta(f) \;,$$

de donde

$$g\delta' = g(0)\delta' - g'(0)\delta \;.$$

En nuestro caso $g(0) = 0$ y $g'(0) = a$ de donde se desprende la afirmación pasando a las funciones generalizadas.

Directamente con las funciones generalizadas:

$$g(x)\delta'(x) = (g\delta)'(x) - g'(x)\delta(x) = -g'(0)\delta(x) + (g\delta)'(x) \;;$$

pero,

$$\int (g\delta)'(x)f(x)\,dx = -\int g(x)\delta(x)f'(x) = -g(0)f'(0) = g(0)\int \delta'(x)f(x) \;,$$

de modo que

$$g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x) \;.$$

c) Nuevamente hay dos variantes. Directamente con las funciones generalizadas:

$$(gH)' = g'H + gH' \;,\;\; (gH)'' = g''H + 2g'H' + gH'' \;.$$

Ahora sabemos (sino calcule)

$$H'(x) = \delta(x) \;,\;\; H''(x) = \delta'(x) \;,$$

de modo que

$$(gH)''(x) = g''(x)H(x) + 2g'(x)\delta(x) + g(x)\delta'(x) \;;$$

y usando $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$ y b),

$$(gH)''(x) = g''(x)H(x) + 2g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x)$$

$$= g''(x)H(x) + g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x) \ .$$

En este caso $g''(x) = -a^2 \sin(ax)$, $g(0) = 0$ y $g'(0) = a$ lo que nos entrega la fórmula deseada.

La otra variante vía distribuciones procede a partir de la distribución T_{gH}. Primero vemos

$$(gT_p)(f) := T_p(gf) = \int p(x)g(x)f(x)\,dx = T_{pg}(f) \ ,$$

o sea:

$$(gT_p) = T_{gp} \ .$$

Ahora

$$(T_{gp})'(f) = -T_{gp}(f') = -\int g(x)p(x)f'(x)\,dx = \int (g'(x)p(x) + g(x)p'(x))f(x)\,dx = T_{(gp)'}(f) \ ,$$

o sea:

$$(T_{gp})' = T_{g'p+p'g} = g'T_p + gT_{p'} \ .$$

Derivando de nuevo,

$$(T_{gp})'' = T_{(gp)''} = g''T_p + 2g'T_{p'} + gT_{p''} \ .$$

En nuestro caso $p = H$ y sabemos (calcúlelo sino)

$$(T_H)' = \delta \ , \ \ (T_H)'' = \delta' \ ,$$

de modo que

$$(T_{gH})'' = g''T_H + 2g'\delta + g\delta' \ ,$$

y con b)

$$(T_{gH})'' = g''T_H + g'(0)\delta + g(0)\delta' \ .$$

Problema 3: *(Examen final del 7 de julio de 2016)*

a) Muestre que si $u(\boldsymbol{x}, t)$ en una solución de la ec. de onda con fricción (llamada ecuacion del telégrafo)

$$u_{tt} = c^2 \Delta u - k u_t \ , \ \ k, c > 0 \ ,$$

en una region acotada $V \subset \mathbb{R}^d$ de borde suave ∂V donde u satisface una condición homogenea de Dirichlet ($u|_{\partial V} \equiv 0$) o de Neumann ($\partial u/\partial n)|_{\partial V} \equiv 0$), entonces la “energía”

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_V \{(u_t)^2 + c^2|\nabla u|^2\} d\boldsymbol{x} \ , \ \ t \geq 0 \ ,$$

es una función no-creciente de t.

b) Deduzca que la solución del problema de valores iniciales (u y u_t especificados para $t = 0$ en V) de la ec. del telégrafo con condición de Dirichlet o de Neumann arbitraria es única (si existe) incluso si se le agrega un término de fuente a la ecuación.

Solución:

a) La primera identidad de Green nos dice que

$$\int_V (f\Delta g + (\nabla f)\cdot(\nabla g))dv = \int_{\partial V} f\left(\frac{\partial g}{\partial n}\right) d\sigma \ .$$

Aplicando esto a una solución u del problema, el miembro derecho se anula por la condición de borde homogénea (de Dirichlet o Neumann) de modo que

$$\int_V (\nabla u)\cdot(\nabla u))dv = -\int_V u\Delta u\, dv \ ,$$

y por lo tanto

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_V [(u_t)^2 - c^2 u(\Delta u)]\, dv \ ;$$

Derivando respecto de t bajo la integral,

$$E'(t) = \frac{1}{2}\int_V (2u_t u_{tt} - c^2 u_t(\Delta u) - c^2 u(\Delta u_t))\, dv \ .$$

Pero, por la segunda identidad de Green,

$$\begin{aligned}\int_V u(\Delta u_t)\, dv &= \int_V (\Delta u)u_t\, dv + \int_{\partial V}[u(\partial u_t/\partial n) - (\partial u/\partial n)u_t]\, d\sigma \\ &= \int_V (\Delta u)u_t\, dv + \int_{\partial V}[u(\partial u/\partial n)_t - (\partial u/\partial n)u_t]\, d\sigma \ ,\end{aligned}$$

y en la integral sobre el borde se tiene –dependiendo del caso– ya sea $u \equiv 0$ y por ende $u_t \equiv 0$ (Dirichlet), o bien $(\partial u/\partial n) \equiv 0$ y por ende $(\partial u/\partial n)_t \equiv 0$ (Neumann), de modo que –en ambos casos–

$$\int_V u(\Delta u_t)\, dv = \int_V (\Delta u)u_t\, dv \ .$$

Entonces obtenemos

$$E'(t) = \int_V u_t[u_{tt} - c^2\Delta u]\, dv = -k\int_V (u_t)^2\, dv \ ,$$

que es manifiestamente no-positivo[2]. De esto se desprende que

$$0 \le E(t) \le E(0)\ ,\quad t \ge 0\ . \tag{3}$$

b) Sean u_1 y u_2 soluciones de la ec. $u_{tt} = c^2(\Delta u) - ku_t + f$, donde f es función de $(\boldsymbol{x}, t)$, y se cumplen las condiciones de borde de Dirichlet o de Neumann (i.e. $u|_{\partial V} = g$ o bien $(\partial u/\partial n)|_{\partial V} = g$) y las condiciones iniciales $u(\boldsymbol{x}, 0) = \varphi(\boldsymbol{x})$ y $u_t(\boldsymbol{x}, 0) = \psi(\boldsymbol{x})$ para $\boldsymbol{x} \in V$. Con $u := u_1 - u_2$ se tiene $u_{tt} = c^2(\Delta u) - ku_t$ y $u|_{\partial V} \equiv 0$ o bien $(\partial u/\partial n)|_{\partial V} \equiv 0$ asi como $u(\boldsymbol{x}, 0) = u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in V$. Si E denota la energía asociada a u tenemos $E(0) = 0$, y (3) implica que $E(t) = 0$ para todo $t \ge 0$. Entonces

$$u_t \equiv 0 \ \ (\text{y también } \nabla u \equiv \mathbf{0} \text{ en } V)\ \ ,$$

Esto implica que u no depende de $t\,(\ge 0)$ y por ende $u(\boldsymbol{x}, t) = u(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ para todo $t \ge 0$ y $\boldsymbol{x} \in V$. Esto verifica que $u_1 = u_2$.

[2]Observese que podriamos tomar a k como función no-negativa de $(\boldsymbol{x}, t)$ para obtener este mismo resultado.