Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Tercer parcial (17/11/2016): Soluciones[1]

Problema 1: Extienda la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

al intervalo $(-1, 1)$ de modo que la serie de Fourier resultante sea en cosenos. Comente (justificando) sobre la convergencia de esta serie y utilicela para determinar

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \ .$$

Solución: Usamos las fórmulas generales para un intervalo (simétrico) de largo L que en nuestro caso es 2:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(t) \cos(n2\pi t/L) \, dt \ , \ \ b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(t) \sin(n2\pi t/L) \, dt \ .$$

Se debe tomar la extensión par $f(x) = f(-x)$ para $-1 < x < 0$ que no introduce discontinuidades fuera de aquella en $\pm 1/2$ de modo que la extensión es continua a trozos con finitas discontinuidades simples. En estos puntos la serie converge a $1/2$ y en los demas la convergencia es puntual. Hay convergencia en media cuadrática ya que la función extendida es continua a trozos con finitas discontinuidades simples y es por ende de módulo cuadrado integrable.
Se tiene

$$a_o = \int_{-1}^{1} f(x) \, dx = 2 \int_{0}^{1} f(x) \, dx = 2 \int_{0}^{1/2} dx = 1 \ ;$$

y, para $n \geq 1$,

$$a_n = 2 \int_{0}^{1/2} \cos(n\pi x) \, dx = \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2(-1)^j}{(2j+1)\pi} & , \quad \text{si } n = 2j+1 \text{ con } j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La serie de Fourier es entonces

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^j}{(2j+1)} \cos((2j+1)\pi x) \ .$$

Entonces, con

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx = 1 \ , \ \ \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)^2 \, dx = 1/2 \ , \ \ n \geq 1 \ ,$$

y la convergencia en media cuadrática

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx = \int_{0}^{1} f(x)^2 \, dx = \int_{0}^{1/2} dx = 1/2 \ ;$$

[1] G.A.R.

de modo que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2j+1)^2} = \pi^2/8 \ .$$

Problema 2: Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Solución: Las raices de $g(z) := z^2+2z+2$, $z \in \mathbb{C}$, son $z_\pm := -1 \pm i$. Ya que g es polinomio de orden 2, se tiene

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)^+} \frac{dz}{g(z)} = 0$$

para $C(0,R)^+$ el semicírculo superior de radio R alrededor de 0 recorrido anti-horariamente. Entonces para $R > |-1 \pm i| = \sqrt{2}$,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{g(x)} + \int_{C(0,R)^+} \frac{dz}{g(z)} = 2\pi i Res(1/g, z_+) = 2\pi i \lim_{z\to z_+} (z - z_+)/g(z) = \frac{2\pi i}{z_+ - z_-} = \pi$$

pues el polo simple z_+ es la única singularidad de $1/g$ que encierra el camino cerrado simple positivo $[-R,R] + C(0,R)^+$.
Concluimos que

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi \ .$$

Pero podemos decir mucho más. Ya que el integrando no tiene singularidades pues

$$g(x) = (x+1)^2 + 1 \ ,$$

y es siempre positivo ya que

$$g(x) \geq g(-1) = 1 \ ;$$

entonces, para $b > 0$, $a > 2$,

$$\int_{-a}^{b} dx/g(x) = \int_{-2}^{0} dx/g(x) + \int_{0}^{b} dx/g(x) + \int_{-a}^{-2} dx/g(x)$$

$$< 2 + \int_{0}^{b} dx/(x+1)^2 + \int_{-a}^{-2} dx/(x+1)^2$$
$$= 2 - (1/(b+1)) + 1 + 1 - 1/(a-1) < 4 \ .$$

Las funciones $0 < b \mapsto \int_0^b dx/g(x)$ y $0 < a \mapsto \int_{-a}^0 dx/g(x)$ son entonces ambas positivas, crecientes y acotadas. Pero entonces la integral impropia existe y, en tal caso, es igual a su valor principal (vease “Segundas y últimas indicaciones” sobre la guía 6, problema 3, en la w-página).

Problema 3: Discuta las soluciones de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2xy^2 + x}{x^2y - y} \ ,$$

especificando para que intervalos de la variable x son válidas. ¿Es cierto que las soluciones con $y(0) = y_o$ son únicas si $y_o \neq 0$? Indique puntos donde pasa más de una solución.

Solución: Reescribiendo

$$y' = \frac{xp(y)}{yq(x)} \ , \ \ p(y) := 2y^2 + 1 \ , \ \ q(x) = x^2 - 1 \ ,$$

la ED resulta separable. Si $f(x,y) = xp(y)/yq(x)$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(2y^2-1)}{y^2(x^2-1)}$$

fuera de los puntos $(\pm 1, y)$ con y arbitrario y fuera de $(x,0)$ donde f no es diferenciable. Esperamos tormentas en las rectas verticales $\{(\pm 1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ y en el eje "x".

Con

$$\int dy \frac{y}{p(y)} = \frac{1}{4}\int \frac{p'(y)}{p(y)}\, dy = \frac{1}{4}\ln|p(y)| = \frac{1}{4}\ln(p(y))\ ;$$

$$\int dx \frac{x}{q(x)} = \frac{1}{2}\int \frac{q'(x)}{q(x)} = \frac{1}{2}\ln|q(x)|$$

obtenemos

$$p(y) = Cq(x)^2 = C(x^2-1)^2\ ,\ \ C > 0\ .$$

Entonces

$$y_{\pm}(x) = \pm\sqrt{\frac{C(x^2-1)^2-1}{2}}\ ,\ \ |x^2-1| \geq C^{-1/2}\ ,\ \ C > 0\ .$$

Más especificamente, para $C > 0$ hay dos soluciones

$$\xi_{\pm}^{(C)}(x) := \pm\sqrt{\frac{C(x^2-1)^2-1}{2}}\ ,\ \ |x| \geq \sqrt{1+1/\sqrt{C}}\ ;$$

en $(-\infty, -\sqrt{1+1/\sqrt{C}})$ y en $(\sqrt{1+1/\sqrt{C}}, \infty)$ y para $C > 1$ hay dos soluciones

$$z_{\pm}^{(C)}(x) := \pm\sqrt{\frac{C(x^2-1)^2-1}{2}}\ ,\ \ |x| \leq \sqrt{1-1/\sqrt{C}}$$

en el intervalo $(-\sqrt{1-1/\sqrt{C}}, \sqrt{1-1/\sqrt{C}})$. Todas estas son continuas en los extremos (finitos) de sus intervalos de definición donde se anulan pero dejan de ser diferenciables en esos extremos.
Si queremos resolver el problema de Cauchy $y(x_o) = y_o$ basta estudiar el caso $x_o \geq 0$ ya que las dos parejas de soluciones encontradas son pares. Si $y_o > 0$ debemos tomar ξ_+ si $x_o > 1$ o bien z_+ cuando $0 < x_o < 1$ y hay claramente una sola solución del problema de Cauchy. El caso $y_o < 0$ es similar con soluciónes ξ_- o bien z_-. Cuando $y_o = 0$ el x_o correspondiente cae necesariamente al borde del intervalo de definición de alguna de las cuatro funciones $\xi_\pm, z_\pm$ y en ese punto hay efectivamente dos curvas integrales aunque no son diferenciables en x_o.

Si $x_o = 0$, debemos tomar

$$z_{\pm}^{(C)}(0) = \pm\sqrt{(C-1)/2}\ ,\ \ C > 1\ ,$$

si $y_o \neq 0$ hay una y sólo una solución que satisface $y(0) = y_o$ que es aquella con $C = 2p(y_o) = 2y_o^2 + 1 > 1$ y el signo en $z_\pm$ igual al de y_o. Pero cuando $C = 1$ ambas soluciones $z_{\pm}^{(1)}$ dejan de existir mientras que las soluciones $y_{\pm}^{(1)}$ no comprenden el punto $x = 0$.

Otra manera de plantear el resultado es la siguiente. La solución del problema de Cauchy $y(x_o) = y_o$:

a) no existe si $x_o = \pm 1$;

b) es única si $y_o \neq 0$ y $x_o \neq \pm 1$ dada por

$$y(x) = \operatorname{sgn}(y_o)\sqrt{\frac{p(y_o)(x^2-1)^2}{2q(x_o)^2} - \frac{1}{2}}\ ;$$

c) si $y_o = 0$ y $x_o \neq \pm 1$ entonces no hay solución diferenciable en $(x_o, 0)$ pero las soluciones

$$\eta_\pm(x) := \pm\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{2q(x_o)^2} - \frac{1}{2}}\ ,\quad \text{en el intervalo} \left\{ \begin{array}{l} (x_o, \infty) \text{ para } x_o > 1 \\ (-\infty, x_o) \text{ para } x_o < -1 \\ (-|x_o|, |x_o|) \text{ para } |x_o| < 1 \end{array} \right.$$

satisfacen

$$\lim_{x\to x_o} \eta_\pm(x) = 0\ ,\quad \lim_{x\to x_o} \eta'_\pm(x) = \pm\infty\ .$$

Los puntos (x_o, y_o) del plano donde "pasan" dos soluciones son entonces $(\pm a, 0)$ con $a > 1$ y $(\pm b, 0)$ con $0 \le b < 1$, o sea el eje "x" sin los puntos ± 1. Los puntos del plano donde no pasa ninguna curva integral son $(\pm 1, y)$ con $y \in \mathbb{R}$, o sea las verticales en $x = \pm 1$.

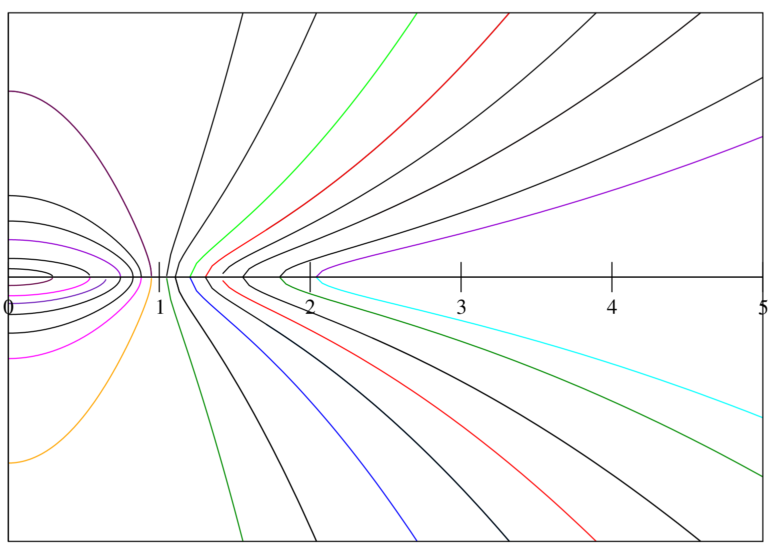

Figura 1: Curvas integrales en el semiplano $\{x \ge 0\}$. Basta con estas ya que si $0 \le x \mapsto y(x)$ es una curva integral entonces $0 \ge x \mapsto y(-x)$ también lo es.

Finalmente, la manera más conveniente de parametrizar las curvas integrales es quizás vía la abcisa p del punto donde intersectan el eje "x" (allí nacen (o mueren) dos curvas integrales)

$$y_\pm^{[p]}(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{x^2-1}{p^2-1}\right)^2 - 1}\ .$$

Para $|p| > 1$ estás están definidas en $(-\infty, p)$ cuando $p < -1$, y en (p, ∞), cuando $p > 1$. Si en cambio $0 < |p| < 1$, $y_\pm^{[p]} = y_\pm^{[-p]}$ está definida en el intervalo $(-|p|, |p|)$ y nace (muere) en los extremos del intervalo.

Problema 4: Determine la solución general de $x^2y' + 3xy = 1$. Si se impone que $y(1) = 1$, ¿hay unicidad de la solución?

Solución: Se puede probar una solución de la forma $y(x) = ax^p$ con a y p reales. En tal caso,

$$1 = apx^{p+1} + 3ax^{p+1} = a(3+p)x^{p+1}$$

de donde $p = -1$ y $a = 1/(3+p) = 1/2$. O sea que

$$z(x) := 1/(2x) \ , \quad x \neq 0$$

es solución. Pero frecuentemente uno no descubre inmediatamente esta solución particular.

Empezando de nuevo, la ED es lineal inhomogenea. El procedimiento canónico es el siguiente. La solución de la ec. homogenea correspondiente

$$0 = x^2u' + 3xu = x(xu' + 3u)$$

se obtiene separando variables

$$\frac{du}{u} = -\frac{3}{x}\,dx; \Longrightarrow \quad \ln|u| = -3\ln|x| + b \ ,$$

o sea

$$u(x) = a/x^3 \ , \quad a \in \mathbb{R} \ ; \quad x \neq 0 \ .$$

La fórmula general es (la integral es indefinida)

$$y(x) = \frac{a}{x^3} + \frac{1}{x^3}\int x^3 \frac{1}{x^2}dx = \frac{a}{x^3} + \frac{1}{2x} \ .$$

La constante a queda determinada por la condición $y(x_o) = y_o$ si $x_o \neq 0$

$$y(x) = \left(y_o - \frac{1}{2x_o}\right)(x_o/x)^3 + \frac{1}{2x} \ , \quad x \neq 0 \ .$$

La solución con $y(x_o) = y_o$ es siempre única cuando $x_o \neq 0$ y no hay ninguna curva integral que toque el eje y.

Problema 5: Verifique que la ec. diferencial $2xe^{2y}y' - 3x^4 - e^{2y} = 0$ no es exacta. Muestre que admite un factor integrante que es función de x solamente.

Solución: Podemos escribir la ED como $B(x,y)dy + A(x,y)dx = 0$ con $A(x,y) = -3x^4 - e^{2y}$ y $B(x,y) = 2xe^{2y}$ que tienen

$$\frac{\partial A}{\partial y} = -2e^{2y} \ , \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 2e^{2y}$$

pero la ED no es exacta. Sin embargo, intentamos

$$y' = -\frac{A}{B} = -\frac{A\mu}{B\mu}$$

con $\partial\mu/\partial y = 0$. Obtenemos la condición

$$\frac{\partial A\mu}{\partial y} = -2e^{2y}\mu(x) = \frac{\partial B\mu}{\partial x} = 2e^{2y}\mu + B\mu'$$

o sea

$$\mu' = -2/x \ ;$$

de donde

$$\mu(x) = A/x^2$$

con una constante A que se puede elegir igual a 1. Entonces

$$\frac{2e^{2y}}{x}dy - \left(3x^2 + \frac{e^{2y}}{x^2}\right)dx$$

es exacta.