Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Más sobre el problema 3 del primer parcial[1]

En las soluciones al primer parcial lo dicho sobre el problema 3 se limita a dar "la solución" y sugerir que la via por

$$\log(4 + z^2)$$

no funciona. Pero no entra en detalles. Acá pretendo aclarar esto. Recuerdo el problema: se busca función analítica w definida en $D := \mathbb{C} \setminus [-2i, 2i]$ tal que $w(z)^2 = 4 + z^2$.

El motivo por el cual $\log(4 + z^2)$ no conduce a nada se encuentra en:

Lema 1 *La aplicación $\mathbb{C} \ni z \mapsto 4 + z^2$ mapea a D en el dominio $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$.*

Demostración: Si $x = 4 + z^2 \in [0, 4]$ entonces $z^2 = x - 4 = -(4 - x)$ y $z = \pm i\sqrt{4 - x}$ que es un número imaginario puro de módulo $\sqrt{4 - x} \leq 2$. Esto muestra que la imagen de D no contiene al intervalo $[0, 4]$. Falta verificar que si $w \in \mathbb{C} \setminus [0, 4]$ entonces hay $z \in D$ con $4 + z^2 = w$.

Si $\mathrm{Im}(w) = 0$ entonces $w = a$ con $a < 0$ o bien $a > 4$. Cuando $a < 0$ tomese $z = \pm i\sqrt{4 + |a|}$ que cumple $4 + z^2 = 4 - (4 + |a|) = a = w$ y, ya que $|z| = \sqrt{4 + |a|} > 2$, $z \in D$. Cuando $a > 4$ tomese $z = \pm\sqrt{a - 4}$ que es real, está en D y $4 + z^2 = a$.
Si $\mathrm{Im}(w) \neq 0$ entonces

$$z = \pm\sqrt{|w - 4|}\exp(i\mathrm{Arg}(w - 4))$$

satisface $4 + z^2 = w$ y tiene parte real no nula pues si $\mathrm{Re}(z) = 0$ tendríamos $z^2 = -|z|^2$ que es real mientras que $\mathrm{Im}(w - 4) = \mathrm{Im}(w) \neq 0$; esto verifica que $z \in D$. ■

En consecuencia, si queremos que $D \ni z \mapsto f(z)$ con $f(z) \in \log(4 + z^2)$ este definido y sea continuo en D entonces ese "logaritmo" debe estar definido y ser continuo en $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$. Pero –como se ve por ejemplo en *"Más sobre el logaritmo"* en la w-página de la materia– el dominio de una rama del logaritmo no puede incluir curvas cerradas que encierren a $z = 0$. Claramente $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ contiene curvas cerradas que encierran a $z = 0$.

En cambio,

Lema 2 *La aplicación $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ni z \mapsto (1 + 4/z^2)$ transforma a D en $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0] \cup \{1\}\}$.*

Demostración: Escribamos $\phi(z) := 1 + 4/z^2$ que es analítica en el plano complejo pinchado en $z = 0$. Analizamos las soluciones z de

$$\phi(z) = w\ ,$$

[1] G.A.R.

donde w es un complejo dado. Ya que $\phi(z) = 1$ es equivalente a $4/z^2 = 0$ y no hay ningún número complejo z con esta propiedad, $w = 1$ queda excluido y estamos resolviendo

$$z^2 = 4/(w-1) \ , \quad w \neq 1 \ .$$

Si $w \in (-\infty, 0]$ o sea $w = -x$ con $x \geq 0$, entonces $\phi(z) = w$ sii $z^2 = -4/(x+1)$ o sea $z = \pm i2/\sqrt{x+1}$ que tienen módulo $2/\sqrt{x+1} \leq 2$ y están en $[-2i, 2i]$. Esto verifica que la imagen de D bajo ϕ no contiene a $(-\infty, 0]$.

Si $w \notin (-\infty, 0] \cup \{1\}$ tenemos $\mathrm{Im}(w) \neq 0$ o bien $w = x$ con x real y $1 \neq x > 0$. En el caso $w = x > 0$ tenemos que $z^2 = 4/(x-1)$. Cuando $x > 1$, $z = \pm 2/\sqrt{x-1}$ y esto es real y no nulo de modo que $z \in D$; cuando $0 < x < 1$, $z = \pm i2/\sqrt{1-x}$ y esto es imaginario de modulo $2/\sqrt{1-x} > 2$ por lo cual $z \in D$.
En el caso $\mathrm{Im}(w) \neq 0$,

$$z = \pm \frac{2}{\sqrt{|w-1|}} \exp(-i\mathrm{Arg}(w-1)/2) \ ,$$

y esto tiene parte real no nula ya que en caso contrario $z^2 = -|z|^2$ mientras que $\mathrm{Im}(4/(w-1)) = -(4/|w-1|^2)\mathrm{Im}(w) \neq 0$. Por lo tanto $z \in D$. ■

En consecuencia, cualquier rama g del logaritmo definida en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ nos permite definir la rama

$$\Phi(z) := \exp\left\{ g\left(1 + \frac{4}{z^2}\right)/2 \right\} \ , \quad z \in D$$

de la raíz cuadrada de $(1 + 4/z^2)$, o sea

$$\Phi(z)^2 = 1 + 4/z^2 \ , \quad z \in D \ .$$

Φ es analítica como composición de la función exponencial (que es entera), la rama g del logaritmo y la función $z \mapsto 1 + 4/z^2$ que es analítica en D. A fortiori,

$$w_{\pm} := \pm z\Phi(z) \ , \quad z \in D \ , \tag{1}$$

es analítica en D como producto de las funciones enteras $z \mapsto \pm z$ y Φ; y satisface $(w_{\pm}(z))^2 = 4 + z^2$. ¿Cuantas ramas del logaritmo hay definidas en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$? Muchisimas; tantas como argumentos hay que sean discontinuos en el semieje real no-positivo. Estos argumentos son exactamente los $\arg_{(2k-1)\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$ cuya discontinuidad se localiza en $z = 0$ y en aquellos puntos z cuyo argumento es un múltiplo impar de π y estos son exactamente los números reales no positivos. Las ramas asociadas del logaritmo son

$$g_k(z) = \ln|z| + i\arg_{(2k-1)\pi}(z) \ , \quad z \notin (-\infty, 0] \ .$$

Ya que $g_o = \mathrm{Log}$ y

$$\arg_{(2k-1)\pi}(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ , \quad z \notin (-\infty, 0] \ ,$$

tenemos

$$\Phi_k(z) := \exp\left\{g_k\left(1+4/z^2\right)/2\right\} = \exp\left(\frac{1}{2}(\mathrm{Log}(1+4/z^2)+i2k\pi)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1+4/z^2)\right)\exp(ik\pi) = (-1)^k \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1+4/z^2)\right) \ ,$$

de modo que $\Phi_k = \Phi_o$ para k par mientras que $\Phi_k = -\Phi_o$ para k impar. Luego

$$w_\pm(z) = \pm z \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1+4/z^2)\right) \ , \quad z \in D$$

son las dos (i.e., todas) raices cuadradas de z^2+4 definidas para $z \in D$.