Mecánica Cuántica I, 2014

Guía 3, Problemas 1,2, 4f y 5

G.A. Raggio

Problema 1: Es frecuente leer frases que o afirman o sugieren que para que una función (compleja de una variable real) sea de módulo cuadrado integrable es necesario que "decaiga a 0 en el infinito". ¡Esto es falso! Construya un ejemplo de una función sobre $\mathbb{R}$ de módulo cuadrado integrable pero que no tienda a cero cuando $|x| \to \infty$ ($x \in \mathbb{R}$).
Sugerencia: un peine con infinitos dientes rectangulares de igual largo pero cada vez más finos.

Solución: La idea es construir una función de modo que la integral de su módulo cuadrado sea una serie convergente. Recordamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1-1/2} = 2 \; .$$

Sea

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } \pm n - 2^{-n-2} \leq x \leq \pm n + 2^{-n-2} \text{ para algún } n = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 & , \quad \text{en caso contrario} \end{cases} \; .$$

Este es el peine que se sugería: la función es 1 en la unión de todos los intervalos $[\pm n - 1/2^{n+2}, \pm n + 1/2^{n+2}]$ y cero fuera de esta unión. Claramente $f(-x) = f(x)$; casi tan claramente, ninguno de los dos límites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existe. Sin embargo, dados R_1 y R_2 positivos y mayores que 2, sea N_2 aquel número natural que satisface $N_2 \leq R_2 < N_2 + 1$ y sea y N_1 aquel número natural que satisface $N_1 \leq R_1 < N_1 + 1$.

Tendremos entonces que

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N_2-1} \frac{1}{2^{n+2}} + \sum_{m=1}^{N_1-1} \frac{1}{2^{m+2}} \leq \int_{-R_1}^{R_2} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N_2+1} \frac{1}{2^{n+2}} + \sum_{m=1}^{N_1+1} \frac{1}{2^{m+2}}$$

De modo que

$$\lim_{R_1, R_2 \to \infty} \int_{-R_1}^{R_2} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} = 1 \; .$$

Comentario: La idea de que una función de onda debe anularse en $\pm\infty$ para que está función sea la amplitud de una densidad de probabilidad pulula en los textos de mecánica cuántica[1]. No he encontrado semejantes afirmaciones en el libro de Messiah -que leo hace ya muchos años.
La verdad es mucho más interesante: si f es de módulo cuadrado integrable y es absolutamente continua con "derivada" g también de módulo cuadrado integrable (i.e., f está en el dominio de definición de $\widehat{p}$), entonces f es continua, acotada y $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Problema 2: [Identidades de polarización] Verifique que para un operador lineal A en un espacio de Hilbert (complejo) con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se tiene

$$\langle f, Ag \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \langle f+g, A(f+g) \rangle - \langle f-g, A(f-g) \rangle + i \langle f-ig, A(f-ig) \rangle - i \langle f+ig, A(f+ig) \rangle \right\} ,$$

luego también $\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \left(\| f+g \|^2 - \| f-g \|^2 + i \| f-ig \|^2 - i \| f+ig \|^2 \right)$.

Solución: Expanda el miembro derecho de la identidad de polarización usando que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal en la segunda componente y conjugado-lineal en la primera. Para la segunda identidad tome

[1] El más "moderno" ejemplo es el libro de Ballentine.

$A = \mathbf{1}$.

Problema 4:
f) Si A y B conmutan con su conmutador, entonces:
i) $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$; $[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$;
ii) $e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2} = e^B e^A e^{[A,B]}$.

Solución: La segunda identidad de i) se desprende de la primera intercambiando A y B. Para la primera, observamos que es trivialmente correcta para $n = 1$ y demostramos la relación por inducción ya que

$$[A, B^{n+1}] = B[A, B^n] + [A, B]B^n = B[A, B^n] + B^n[A, B] \overset{!}{=} nB^n[A, B] + B^n[A, B]$$

pues B^n conmuta con $[A, B]$.
Para verificar ii) empezamos con

$$[A, e^{tB}] = \sum_{n\geq 0} t^n[A, B^n]/n! = t\sum_{n\geq 1}(tB)^{n-1}[A, B]/(n-1)! = t\left(\sum_{n\geq 0}(tB)^n/n!\right)[A, B] = te^{tB}[A, B] \tag{1}$$

usando(i) y donde t es cualquier real. Calculando algunas potencias mas, e.g. $[A^2, e^B] = e^B[A, B]^2 + 2e^B A[A, B]$, intuimos que

$$[A^n, e^B] = e^B \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}[A, B]^k \tag{2}$$

lo que, si se supone verdadero para n, conduce a

$$\begin{aligned}
[A^{n+1}, e^B] &= A[A^n, e^B] + [A, e^B]A^n = Ae^B\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}[A, B]^k + e^B[A, B]A^n \\
&= [A, e^B]\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}[A, B]^k + e^B A\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}[A, B]^k + e^B[A, B]A^n \\
&= e^B[A, B]\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}[A, B]^k + e^B A\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}[A, B]^k + e^B[A, B]A^n \\
&= e^B\left(\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \{A^{n-k}[A, B]^{k+1} + A^{n+1-k}[A, B]^k\} + A^n[A, B]\right) \\
&= e^B\sum_{k=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} A^{n+1-k}[A, B]^k
\end{aligned}$$

donde usamos la relación

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 .$$

Esto nos permite una demostración inductiva de (2). Pero entonces,

$$\begin{aligned}
[e^A, e^B] &= \sum_{n\geq 0}[A^n, e^B]/n! = \sum_{n\geq 0} \frac{e^B}{n!} \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}[A, B]^k \\
&= e^B\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}[A, B]^k - A^n\right)
\end{aligned}$$

$$= e^B \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(A+[A,B])^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!} \right) = e^B e^{A+[A,B]} - e^B e^A \ ;$$

vale decir

$$e^A e^B = e^B e^{A+[A,B]} = e^B e^A e^{[A,B]} \ .$$

Si t y s son reales arbitrarios, nada cambia si consideramos a tA y a sB en vez de A y B. Por lo tanto,

$$e^{tA} e^{sB} = e^{sB} e^{tA} e^{st[A,B]} \ , \ \ s,t \in \mathbb{R} \ . \tag{3}$$

Ahora, sea

$$U_t := e^{tA} e^{tB} e^{-t^2[A,B]/2} \ , \ \ t \in \mathbb{R} \ .$$

Tenemos

$$U_0 = \mathbf{1}$$

y, definiendo $C := [A,B]$, y usando (3)

$$U_t U_s = e^{tA} e^{tB} e^{-t^2C/2} e^{sA} e^{sB} e^{-s^2C/2} = e^{tA} \left(e^{tB} e^{sA} e^{stC} \right) e^{-stC} e^{sB} e^{-(s^2+t^2)C/2}$$

$$= e^{tA} e^{sA} e^{tB} e^{sB} e^{-(s+t)^2C/2} = e^{(t+s)A} e^{(t+s)B} e^{-(t+s)^2C/2} = U_{t+s} \ .$$

Hemos dremostrado que

$$U_t U_s = U_s U_t = U_{t+s} \ , \ \ t,s \in \mathbb{R} \ .$$

Derivando esto con respecto a s y luego tomando $s = 0$, obtenemos la ecuación diferencial

$$dU_t/dt = XU_t = U_t X \ , \ \ X = (dU_t/dt)|_{t=0} \ , \ \ U_0 = \mathbf{1}$$

cuya solución es

$$U_t = e^{tX} \ .$$

Calculamos X, usando (1)

$$dU_t/dt = AU_t + e^{tA} B e^{tB} e^{-t^2C/2} - tU_t C = (A+B-tC)U_t + [e^{tA}, B] e^{tB} e^{-t^2C/2}$$

$$= (A+B-tC)U_t + tCU_t = (A+B)U_t \ ;$$

por lo tanto $X = A + B$ y por ende

$$e^{tA} e^{tB} e^{-t^2C/2} = e^{t(A+B)}$$

o lo que es lo mismo

$$e^{tA} e^{tB} = e^{tA+tB+t^2[A,B]/2}$$

que termina la demostración de (ii).

Problema 5: Considere los operadores posición $\widehat{x}$ y momento $\widehat{p}$ actuando sobre $L^2(\mathbb{R})$ dados respectivamente por

$$(\widehat{x}f)(x) = xf(x) \ , \ \ \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \, dx < \infty \ ; \ \ (\widehat{p}f)(x) = -i\hbar f'(x) \ , \ \ \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \, dx < \infty \ .$$

a) Muestre que ambos no son acotados. Vale decir, cualquiera sea $C > 0$ hay $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|f\| = 1$ y $\|\widehat{x}f\| > C$ (resp. $\|\widehat{p}f\| > C$).
b) Verifique que cualquiera sea el número real λ hay una sucesión $\{f_n : n = 1, 2, \cdots\}$ tal que $\|f_n\| = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \|\widehat{x}f_n - \lambda f_n\| = 0$.
c) Lo mismo que b) pero para $\widehat{p}$. ¡Recuerde la transformación de Fourier!

Solución: Hay muchisimas maneras de verificar lo que se pide. Apelando a lo ya hecho, en la Guía 2, se consideró la gaussiana

$$\Psi_{a,\sigma,k}(x) := (2\pi\sigma^2)^{-1/4}\exp\{-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2}+ikx\}\ ,$$

donde a y k son reales arbitrarios y σ es un real positivo. Esta función está normalizada $\|\Psi_{a,\sigma,k}\| = 1$. Calculamos allí que

$$\|(\widehat{x}-a)\Psi_{a,\sigma,k}\|^2 = \sigma^2\ ,$$

$$\|(\widehat{p}-\hbar k)\Psi_{a,\sigma,k}\|^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}\ .$$

Para liquidar b) basta considerar la sucesión $\{\Psi_{\lambda,\sigma_n,k} : n = 1,2,\cdots\}$ donde k es lo que quiera y donde la sucesión $\{\sigma_n : n = 1,2,3,\cdots\}$ es lo que usted prefiera mientras cumpla que $\sigma_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$. En tal caso se tiene $\lim_{n\to\infty}\Psi_{\lambda,\sigma_n,k}(x) = 0$ para todo $x \neq \lambda$ mientras que $\Psi_{\lambda,\sigma_n,k}(\lambda) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4}e^{ik\lambda}$. Hay convergencia punto-por-punto a una función discontinua[2]. Pero no hay ninguna función f de módulo cuadrado integrable tal que $\lim_{n\to\infty}\|\Psi_{\lambda,\sigma_n,.k}-f\| = 0$. Para liquidar c) basta considerar la sucesión $\{\Psi_{a,\sigma_n,\lambda/\hbar} : n = 1,2,\cdots\}$ donde a es arbitrario y donde la sucesión $\{\sigma_n : n = 1,2,3,\cdots\}$ es lo que usted decida mientras cumpla que $\sigma_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \infty$. Ahora la sucesión converge punto-por-punto a la función $x \mapsto e^{ikx} =: g(x)$ que no es de módulo cuadrado integrable y, nuevamente, no hay ninguna f de módulo cuadrado integrable tal que $\lim_{n\to\infty}\|\Psi_{a,\sigma_n,\lambda/\hbar} - f\| = 0$.

Para liquidar a) calcule $\|\widehat{x}\Psi_{a,\sigma,k}\|$ o observe que

$$\|(\widehat{x}-a)f\|^2 = \|\widehat{x}f\|^2 - 2a\langle f,\widehat{x}f\rangle + a^2\|f\|^2$$

para obtener

$$\|\widehat{x}\Psi_{a,\sigma,k}\|^2 = a^2+\sigma^2$$

con lo cual eligiendo a y σ podemos hacer a $\|\widehat{x}\Psi_{a,\sigma,k}\|$ tan grande como nos pidan. Similarmente,

$$\|\widehat{p}\Psi_{a,\sigma,k}\|^2 = (\hbar k)^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$$

lo que también es tan grande como Anselmo quiera.

Por último, observe que b) y c) son equivalentes si $\{f_n\}$ es sucesión como en b) entonces $g_n := \mathcal{F}f_n$ satisface $\|g_n\| = 1$ y

$$\|(\widehat{x}-\lambda)f_n\| = \|\mathcal{F}(\widehat{x}-\lambda)f_n\| = \|\mathcal{F}(\widehat{x}-\lambda)\mathcal{F}^{-1}g_n\| = \|(\mathcal{F}\widehat{x}\mathcal{F}^{-1}-\lambda)g_n\| = \hbar^{-1}\|(\widehat{p}+\hbar\lambda)g_n\|$$

ya que $\mathcal{F}\widehat{x}\mathcal{F}^{-1} = -\widehat{p}/\hbar$.

[2]Que es equivalente en el sentido de Lebesgue a la función identicamente nula.