Mecánica Cuántica I

Guía 3
Marzo de 2014

Problema 1: Es frecuente leer frases que o afirman o sugieren que para que una función (compleja de una variable real) sea de módulo cuadrado integrable es necesario que "decaiga a 0 en el infinito". ¡Esto es falso! Construya un ejemplo de una función sobre $\mathbb{R}$ de módulo cuadrado integrable pero que no tienda a cero cuando $|x| \to \infty$ ($x \in \mathbb{R}$).
Sugerencia: un peine con infinitos dientes rectangulares de igual largo pero cada vez más finos.

Problema 2: [Identidades de polarización] Verifique que para un operador lineal A en un espacio de Hilbert (complejo) con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se tiene

$$\langle f, Ag \rangle = \frac{1}{4}\left\{ \langle f+g, A(f+g) \rangle - \langle f-g, A(f-g) \rangle + i \langle f-ig, A(f-ig) \rangle - i \langle f+ig, A(f+ig) \rangle \right\},$$

luego también $\langle f, g \rangle = \frac{1}{4}\left(\| f+g \|^2 - \| f-g \|^2 + i \| f-ig \|^2 - i \| f+ig \|^2 \right)$.

Problema 3: Dados dos operadores lineales A y B, y α un número complejo, demuestre, usando la definición de operador adjunto, que:
a) $(\alpha\, A \,+\, B)^* \,=\, \overline{\alpha}\, A^* \,+\, B^*$;
b) $(\,A\,B)^* \,=\, B^*\, A^*$;
c) $\left(A^{-1}\right)^* \,=\, (A^*)^{-1}$;
d) $(\,A^*)^* \,=\, A$.

Problema 4: Muestre que para operadores lineales $A, B, C, \cdots$ se tiene:
a) $[A, B] = -[B, A]$;
b) $[A, B]^* = [B^*, A^*]$;
c) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$;
d) $[A, B\,C] = [A, B]C + B[A, C]$;
e) $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$ (identidad de Jacobi);
f) Si A y B conmutan con sus conmutadores, entonces:
i) $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$; $[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$;
ii) $e^A\, e^B = e^{A+B+[A,B]/2} \,=\, e^B\, e^A\, e^{[A,B]}$.
g) $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots$ (una de las fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff).

Problema 5: Considere los operadores posición $\widehat{x}$ y momento $\widehat{p}$ actuando sobre $L^2(\mathbb{R})$ dados respectivamente por

$$(\widehat{x}f)(x) = xf(x)\ ,\quad \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\, dx < \infty\ ;\quad (\widehat{p}f)(x) = -i\hbar f'(x)\ ,\quad \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\, dx < \infty\ .$$

a) Muestre que ambos no son acotados. Vale decir, cualquiera sea $C > 0$ hay $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|f\| = 1$ y $\|\widehat{x}f\| > C$ (resp. $\|\widehat{p}f\| > C$).
b) Verifique que cualquiera sea el número real λ hay una sucesión $\{f_n \,:\, n = 1, 2, \cdots\}$ tal que $\|f_n\| = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \|\widehat{x}f_n - \lambda f_n\| = 0$.
c) Lo mismo que b) pero para $\widehat{p}$. ¡Recuerde la transformación de Fourier!

Problema 6: Demuestre el llamado "Teorema de Ehrenfest": Los valores esperados de las variables dinámicas cuánticas satisfacen las mismas ecuaciones de movimiento que las correspondientes magnitudes clásicas.

Problema 7: Consideremos las ecuaciones de evolución de Heisenberg especificadas por el Hamiltoniano (autoadjunto) H: $A(t) = U_t^* A U_t$, donde $U_t = \exp\{-iHt/\hbar\}$. Muestre que: $(A(t))^* = A^*(t)$, $(zA + B)(t) = zA(t) + B(t)$, para complejos z y $(AB)(t) = A(t)B(t)$.

Problema 8: Considere un oscilador armónico unidimensional de masa m y constante de Hooke k de modo que la frecuencia angular es $\omega := \sqrt{k/m}$.

a) Recordando las soluciones clásicas, resuelva las ecuaciones de movimiento (de Heisenberg) para los operadores posición $\widehat{x}$ y momento $\widehat{p}$. ¿Por qué la evolución cuántica coincide con la clásica?

b) Introduzca el operador (las constantes se eligen solamente para obtener un operador adimensional)

$$\widehat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\,\widehat{p}$$

y su adjunto $\widehat{a}^*$. Resuelva ahora las ecuación de movimiento para $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^*$ (¡desacople!).

c) Verifique que el operador $\widehat{a}$ no es normal calculando el conmutador con su adjunto.

d) ¿Qué puede deducir del hecho que $\widehat{a}^*(t)\widehat{a}(t)$ es independiente del tiempo? Exprese el Hamiltoniano del oscilador armónico en términos del operador $\widehat{a}$ y su adjunto.