Mecánica Cuántica I

Guía 4 – Abril de 2014

Problema 1: Considere una partícula unidimensional de masa m en el potencial de la figura.
a) ¿ Qué puede decirse acerca de la estructura cualitativa del espectro del Hamiltoniano de la

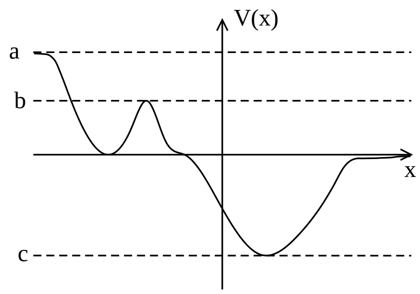

Figura 1: $a > b > 0 > c$; $\lim_{x\to\infty} V(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} V(x) = a$.

partícula?
b) ¿Hay estados ligados? ¿En que intervalo? ¿Que comportamiento asintótico tienen las autofunciones?
c) ¿En que intervalo(s) de energía espera que haya reflexión total o reflexión parcial? Indique una energía por encima de la cual espera resonancias.

Problema 2: *Caja de potencial.* Una partícula de masa m está restringida a moverse en una dimensión entre $x = -L/2$ y $x = L/2$, donde el potencial es nulo.
a) Determine los autovalores E_n y las autofunciones ψ_n del Hamiltoniano imponiendo como condiciones de contorno que las funciones de onda se anulen en los extremos del intervalo.
b) Grafique las primeras 3 autofunciones y analice comparativamente sus nodos (Teoría de Sturm-Liouville).
c) Supongamos que $\psi(x) = C(-\sin(kx) - 3/2\sin(2kx))$, con $k = \pi/L$, y se quiere determinar cómo evoluciona temporalmente esta función de onda. Desarrolle ψ como combinación lineal de las autofunciones de la caja infinita determinando los coeficientes y determine la función de onda $\psi(x,t)$ al tiempo t.
d) Calcule el valor de expectación de la energía de la partícula.
e) Considere también una caja de largo $2L$. Compare las auto-energías mínimas y sus correspondientes autofunciones. Grafique y analice comparando derivadas y curvaturas de ambas funciones.

Problema 3: *Pozo cuadrado de potencial.* Considere una partícula en el siguiente pozo de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ V_o & |x| \geq a \end{cases} .$$

Nos interesa estudiar los estados ligados para este sistema ($E < V_o$).
a) Encuentre una expresión para las autofunciones, y muestre que las soluciones pares tienen energías que satisfacen la ecuación trascendente

$$k\tan(ka) = k' \tag{1}$$

mientras que las impares tendrán energías dadas por

$$k \cot(ka) = -k' \tag{2}$$

donde k e ik' son las partes real e imaginaria de los números de onda dentro y fuera del pozo, respectivamente. Note que k y k' están relacionadas por

$$k^2 + k'^2 = \frac{2mV_o}{\hbar^2} \tag{3}$$

b) Verifique que cuando $V_o \to \infty$ las soluciones de este problema coinciden con las de la caja de potencial.
c) Las ecuaciones (1) y (2) deben ser resueltas gráfica o numéricamente. Para el primer método, la siguiente ayuda puede resultar útil: en el plano ($\alpha = ka$, $\beta = k'a$) imagine un círculo que obedece (3). Los estados ligados están dados por la intersección de la curva $\alpha \tan \alpha = \beta$ o $\alpha \cot \alpha = -\beta$ con el círculo. (Recuerde que α y β son positivos).
d) Muestre que siempre existe una solución par y que no hay soluciones impares a menos que $V_o > \hbar^2\pi^2/8ma^2$. ¿Cuál es el valor de E cuando se satisface la igualdad?

Problema 4: Una partícula de masa m se mueve bajo la acción del potencial unidimensional

$$V(x) \;=\; -V_0\,\delta(x - x_0) \quad ; \quad V_0 \;>\; 0$$

a) Use la ecuación de Schrödinger para obtener las propiedades de la función de onda en $x = x_0$.
b) Dé las energías y autofunciones correspondientes a estados ligados.
c) Considere el pozo de potencial de ancho a y profundidad V_o. Tome los límites $V_o \to \infty$ y $a \to 0$ manteniendo el producto $V_o a$ finito. Muestre que hay un único estado ligado y calcule su energía. Compare con el punto (b).
d) Una partícula incide desde la izquierda con momento $\hbar k$. Calcule el coeficiente de transmisión.
e) Considere ahora que el potencial es de la forma

$$V(x) \;=\; V_0\,(\delta(x) \;-\; \delta(x - x_0))$$

Calcule el coeficiente de transmisión para $x_0 = 2\pi/k$.

Problema 5: Una partícula de masa m se mueve bajo la acción del potencial unidimensional

$$V(x) \;=\; \begin{cases} -V_o & |x| < a \\ 0 & a < x < L \\ +\infty & |x| \geq L \end{cases} \quad .$$

donde $V_o > 0$.

a) Dada la simetría del potencial, ¿qué puede esperarse acerca de la paridad de las autofunciones del Hamiltoniano? Justifique.

b) ¿Qué condiciones de contorno y de continuidad deben cumplir las autofunciones del problema?

c) Dé las autofunciones a menos de constantes multiplicativas. Escriba las ecuaciones que determinan estas constantes.

d) Escriba las ecuaciones para los autovalores del Hamiltoniano.

e) Encuentre condiciones para que haya una sola o ninguna autoenergía negativa. Y muestre que hay a lo sumo un número finito de autoenergías negativas.

Problema 6: *Barrera de potencial.* Considere la barrera rectangular de potencial definida por

$$V(x) = \begin{cases} V_o & |x| < a \\ \\ 0 & |x| \geq a \end{cases} .$$

a) Obtenga los coeficientes de transmisión y reflexión tanto para valores de energía $E > V_o$ como para $0 < E < V_o$.
Grafique los mismos para valores de E/V_o entre 0 y 3. Compare sus resultados con lo que esperaría en el caso clásico.
b) Considere el caso $a \to 0, V_o \to \infty$, con aV_o=cte.
c) Escribiendo la solución general de la ecuación de Schrödinger como

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & x < -a \\ A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} & x > a \end{cases}$$

encuentre la matriz M que relaciona los parámetros A_1, B_1 con A_2, B_2. ¿Cuánto valen los coeficientes de transmisión y reflexión en términos de los elementos de esta matriz?

Problema 7: *El potencial periódico de Kronig-Penney.* Considere una partícula bajo la acción de un potencial periódico en el cual las barreras de potencial tienen amplitud V_0 y ancho $2a$ y las zonas de potencial nulo tienen ancho $2b$.
a) Encuentre la matriz $B(\epsilon)$ que relaciona las amplitudes de onda en x y $x - a$.
b) Encuentre una expresión para los autovalores de la matriz de transferencia y vea que de allí se obtiene una expresión para las zonas de energía permitidas.

Problema 8: *El peine de Dirac.* Dado un potencial periódico construído con una secuencia de funciones delta de Dirac a una distancia a entre ellas:

$$V(x) = V_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x + na) .$$

a) Determine las bandas de energía para este potencial.
b) Use el resultado del problema anterior tomando límite para $(a-b) \to 0$, $V_o \to \infty$, manteniendo $(a-b)V_o$ constante y compare con lo obtenido en a).