Mecánica Cuántica I

Guía 5 Problema 6 – Abril de 2014

Problema 6: *Estados coherentes.* Los autoestados del operador $\mathbf{a}$ se definen por la relación:

$$\mathbf{a}\,\varphi_\alpha = \alpha\varphi_\alpha \quad ; \quad \text{donde } \alpha \text{ es un número complejo.}$$

a) Encuentre una expresión para los autoestados del operador $\mathbf{a}$ como combinación lineal de los autoestados ψ_n del oscilador armónico de masa m y frecuencia ω. Muestre que el operador $\mathbf{a}^*$ no tiene autoestados.
b) Muestre que estos estados pueden escribirse como

$$\varphi_\alpha = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\exp\left(\alpha\,\mathbf{a}^*\right)\psi_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2-\alpha^2\right)\right)\exp\left(-i\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\alpha\hat{p}\right)\psi_0$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2+\alpha^2\right)\right)\exp\left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\alpha\hat{x}\right)\psi_0$$

y también como

$$\varphi_\alpha = \exp\{\alpha\mathbf{a}^* - \overline{\alpha}\mathbf{a}\}\psi_0\ .$$

c) Use los resultados del problema anterior para mostrar que estos estados son estados coherentes (de incerteza mínima) para los operadores posición y momento. Calcule la evolución temporal segun el Hamiltoniano del oscilador armónico para un estado coherente y para la relación de incerteza correspondiente. Compare esta evolución de un estado coherente con su evolución libre.
d) Muestre que los estados coherentes están dados por las funciones de onda

$$\psi(x,t) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}e^{i\phi(t)}\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}[x-q(t)]^2 + i\frac{p(t)x}{\hbar}\right\}$$

donde $p(t)$ y $q(t)$ son, respectivamente, el momento y la posición de un oscilador armónico clásico de masa m y frecuencia angular ω. Calcule el valor de ϕ sabiendo que $\psi(x,t)$ es solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico asociado.
e) Calcule el valor esperado de la energía del oscilador armónico y su dispersión para un estado coherente.

Solución: Recordamos que

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\widehat{x} + \frac{i}{\hbar\alpha}\widehat{p}\right)\ ,\quad \alpha := \sqrt{m\omega/\hbar}\ .$$

α tiene la dimensión de una longitud recíproca mientras que $\mathbf{a}$ no tiene dimensión.
El problema de autovalores para $\mathbf{a}$ es $\mathbf{a}\varphi = z\varphi$ con $z \in \mathbb{C}$ y $\varphi \neq 0$.

a) Si existe podemos expresar a φ en términos de la base ortonormal $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ de autofunciones del osc. armónico o bien del operador $N := \mathbf{a}^*\mathbf{a}$ al autovalor n. Acá tomamos las fases de modo que se tenga

$$\mathbf{a}\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}\ ,\quad \mathbf{a}^*\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}\ .$$

Entonces, con

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\psi_n\ ,$$

$$\mathbf{a}\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\sqrt{n}\psi_{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{n+1}\sqrt{n+1}\psi_n$$

y la ec. de autovalores es equivalente a las ec. de recurrencia

$$c_{n+1} = \frac{z}{\sqrt{n+1}}c_n \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

cuya única solución no-trivial es

$$c_n = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}c_0 \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

con $c_0 \neq 0$. Como

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{z^n}{\sqrt{n!}}c_o \right|^2 = |c_o|^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|z|^{2n}}{n!} = |c_o|^2 e^{|z|^2}$$

deducimos que efectivamente

$$\boxed{\varphi_z := e^{-|z|^2/2} \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\psi_n}$$

es autofunción de $\mathbf{a}$ al autovalor z y está, además, normalizada. También vemos que z es un autovalor simple de $\mathbf{a}$.

Para ver que en cambio $\mathbf{a}^*$ no tiene autovalores podemos proceder de la misma manera. Obtenemos asi la ec. de recurrencia

$$zc_0 = 0 \ , \quad zc_n = \sqrt{n}c_{n-1} \ , \quad n = 1, 2, 3, \cdots \ ,$$

cuya única solución es $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Otra alternativa es la solución directa de la ec. diferencial de primer orden $\mathbf{a}^*\varphi = z\varphi$ que es equivalente a

$$\varphi'(x) = \alpha(\alpha x - z)\varphi(x)$$

cuya solución general es

$$\varphi(x) = C\exp\{\alpha^2x^2/2 - \alpha z x\}$$

cuyo módulo cuadrado $|C|^2\exp\{\alpha^2x^2 - \alpha Re(z)x\}$ no es integrable.

b) Ya que

$$(\mathbf{a}^*)^n\psi_o = (\mathbf{a}^*)^{n-1}\psi_1 = (\mathbf{a}^*)^{n-2}\sqrt{2}\psi_2 = \cdots = \sqrt{n!}\psi_n,$$

tendremos

$$\exp\{z\mathbf{a}^*\}\psi_o = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}(\mathbf{a}^*)^n\psi_o = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\psi_n = e^{|z|^2/2}\varphi_z \ .$$

Por otro lado, ya que $\mathbf{a}^n\psi_o = 0$ tenemos

$$\exp\{w\mathbf{a}\}\psi_o = \psi_o \ ;$$

de modo que, cualquiera sea $w \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\varphi_z = e^{-|z|^2/2}e^{z\mathbf{a}^*}e^{w\mathbf{a}}\psi_o \text{ , para todo } z \in \mathbb{C}} \ .$$

Pero, como $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^*] = 1$, podemos usar la famosa fórmula

$$e^Ae^B = e^{A+B+[A,B]/2}$$

del problema 4 ii) de la guía 3, que es válida si $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, para obtener

$$\boxed{\varphi_z = e^{-(|z|^2+zw)/2} e^{z\mathbf{a}^*+w\mathbf{a}}\psi_o \text{ , para todo } z, w \in \mathbb{C}} \ .$$

Las fórmulas requeridas se obtienen eligiendo a w convenientemente teniendo en cuenta las expresiones para $\widehat{x}$ y de $\widehat{p}$ en términos de $\mathbf{a}$ y su adjunto

(1) $$\widehat{x} = (\mathbf{a}^* + \mathbf{a})/(\sqrt{2}\alpha) \ , \ \ \widehat{p} = i\alpha\hbar(\mathbf{a}^* - \mathbf{a})/\sqrt{2} \ .$$

Con $w = z$ obtenemos

(2) $$\varphi_z = e^{-(|z|^2+z^2)/2} exp\left\{\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} z\widehat{x}\right\}\psi_o \ ;$$

con $w = -z$ obtenemos

$$\varphi_z = e^{-(|z|^2-z^2)/2} exp\left\{-i\sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}} z\widehat{p}\right\}\psi_o \ ;$$

y, por último con $w = -\overline{z}$

$$\varphi_z = exp\{z\mathbf{a}^* - \overline{z}\mathbf{a}\}\psi_o = \exp\left\{i\left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} Im(z)\widehat{x} - \sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}} Re(z)\widehat{p}\right)\right\}\psi_o$$ [1].

Si escribimos

$$z = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}} p$$

de modo que q tiene la dimensión de una longitud y p la dimensión de un impulso, entonces la última fórmula es

(3) $$\varphi_z = \exp\left\{i\left(p\widehat{x} - q\widehat{p}\right)/\hbar\right\}\psi_o \ .$$

Antes de proceder con c), anotamos la fórmula

(4) $$\boxed{\varphi_z(x) = (\alpha^2/\pi)^{1/4} e^{-(|z|^2-z^2)/2} \exp\left\{-\alpha^2\left(x - \frac{\sqrt{2}z}{\alpha}\right)^2/2\right\}}$$

que se obtiene inmediatamente a partir de (2) y la fórmula conocida (ver Problema 1, Guía 5) para ψ_o.

c) Calculamos

$$\langle\varphi_z, \mathbf{a}\varphi_z\rangle = \langle\varphi_z, z\varphi_z\rangle = z \ , \ \ \langle\varphi_z, \mathbf{a}^*\varphi_z\rangle = \langle\mathbf{a}\varphi_z, \varphi_z\rangle = \overline{z} \ ;$$

de modo que con (1) obtenemos

$$\langle\varphi_z, \widehat{x}\varphi_z\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\, Re(z) \stackrel{!}{=} q \ , \ \ \langle\varphi_z, \widehat{p}\varphi_z\rangle = \sqrt{2\hbar m\omega}\, Im(z) \stackrel{!}{=} p \ .$$

[1]Definiendo el llamado *operador de Weyl*

$$W(z) := \exp\{z\mathbf{a}^* - \overline{z}\mathbf{a}\} \ ,$$

tenemos las *relaciones de conmutación de Weyl*

$$W(z_1)W(z_2) = e^{z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2} W(z_1 + z_2)$$

de donde, ya que $W(0) = \mathbf{1}$, vemos que $W(z)$ es unitario con $W(z)^* = W(-z)$. Esta es la forma dada por Weyl a la relación de conmutación $[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar$ que resulta equivalente y más simple de manejar pues involucra operadores unitarios (en particular, acotados). Por supuesto, $\varphi_z = W(z)\psi_o = W(z)\varphi_0$.

¡Vemos acá el motivo detras de la (3)!

Además,

$$\langle\varphi_z,\widehat{x}^2\varphi_z\rangle = \frac{1}{2\alpha^2}\langle\varphi_z,(\mathbf{a}^2+(\mathbf{a}^*)^2+\mathbf{a}\mathbf{a}^*+\mathbf{a}^*\mathbf{a})\varphi_z\rangle$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2}\left(\langle\varphi_z,\mathbf{a}^2\varphi_z\rangle+\langle\mathbf{a}^2\varphi_z,\varphi_z\rangle+\langle\varphi_z,[\mathbf{a},\mathbf{a}^*]+2\mathbf{a}^*\mathbf{a})\varphi_z\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2}\left(z^2 \ +\overline{z}^2+1+2\langle\mathbf{a}\varphi_z,\mathbf{a}\varphi_z\rangle\right) = \frac{1}{2\alpha^2}(4Re(z)^2+1) = q^2+\frac{1}{2\alpha^2}\ ,$$

y, análogamente,

$$\langle\varphi_z,\widehat{p}^2\varphi_z\rangle = \frac{-\alpha^2\hbar^2}{2}(4Im(z)^2+1) = p^2+\frac{\hbar^2\alpha^2}{2}\ ;$$

de modo que

$$\Delta_{\varphi_z}\widehat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\ ,\ \ \Delta_{\varphi_z}\widehat{p} = \frac{\hbar\alpha}{\sqrt{2}}$$

y

$$(\Delta_{\varphi_z}\widehat{x})\ )(\Delta_{\varphi_z}\widehat{p}) = \hbar/2\ .$$

Si ahora $\mathbf{a}(t) := \exp\{iHt/\hbar\}\mathbf{a}\exp\{-iHt/\hbar\}$ con $H=\hbar\omega(\mathbf{a}^*\mathbf{a}+1/2)$, entonces $\mathbf{a}(t)$ es la solución de la ec. dif.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a} = (i/\hbar)[H,\mathbf{a}]\ ,\ \ \mathbf{a}(0)=\mathbf{a}\ .$$

Como $[H,\mathbf{a}] = \hbar\omega[\mathbf{a}^*\mathbf{a},\mathbf{a}] = \hbar\omega[\mathbf{a}^*,\mathbf{a}]\mathbf{a} = -\hbar\omega\mathbf{a}$ obtenemos

$$\mathbf{a}(t) = e^{-i\omega t}\mathbf{a}$$

y entonces

$$\mathbf{a}^*(t) = (\mathbf{a}(t))^* = e^{i\omega t}\mathbf{a}^*\ .$$

Ahora,

$$e^{-iHt/\hbar}\varphi_z = e^{-|z|^2/2}e^{-iHt/\hbar}e^{z\mathbf{a}^*}\psi_o = e^{-|z|^2/2}\left(e^{-iHt/\hbar}e^{z\mathbf{a}^*}e^{iHt/\hbar}\right)e^{-iHt/\hbar}\psi_o$$

$$= e^{-|z|^2/2}\exp\{z\mathbf{a}^*(-t)\}e^{-i\omega t/2}\psi_o = e^{-i\omega t/2}e^{-|z|^2/2}\exp\{ze^{-i\omega t}\mathbf{a}^*\}\psi_o$$

$$= e^{-i\omega t/2}e^{-|e^{-i\omega t}z|^2/2}\exp\{ze^{-i\omega t}\mathbf{a}^*\}\psi_o = e^{-i\omega t/2}\varphi_{e^{-i\omega t}z}\ ;$$

pues si U es unitario entonces $U^*e^AU = e^{U^*AU}$. En particular, $e^{-iHt/\hbar}\varphi_z$ tiene los mismos valores esperados que el estado coherente $\varphi_{z(t)}$ donde $z(t) := e^{-i\omega t}z$. Luego, ya que la dispersión tanto de $\widehat{x}$ como de $\widehat{p}$ en un estado coherente φ_z es independiente de z, deducimos que $e^{-iHt/\hbar}\varphi_z$ tiene las mismas dispersiones que φ_z (i.e., independientes del tiempo) y es coherente.

d) Calculamos

$$z(t) = e^{-i\omega t}z = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\,q(t)+i\frac{1}{\sqrt{2}\alpha\hbar}\,p(t)$$

donde

$$q(t) := q\cos(\omega t)+\frac{1}{m\omega}p\sin(\omega t)\ ,\ \ p(t) := p\cos(\omega t)-m\omega\sin(\omega t)q$$

que son la posición y el momento respectivamente de un osc. armónico clásico de frecuencia ω y masa m. Entonces, para

$$\psi(x,t) := (e^{-iHt/\hbar}\varphi_z)(x)\ ,$$

obtenemos con el resultado previo y la fórmula (4)

$$\psi(x,t) = e^{-i\omega t/2}\varphi_{z(t)}(x) = (\alpha^2/\pi)^{1/4} e^{-i\omega t/2} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}(x-q(t))^2 + i\frac{1}{\hbar}p(t)(x-q(t)/2)\right\} .$$

e) Ya que $H = \hbar\omega(\mathbf{a}^*\mathbf{a} + 1/2)$, tenemos

$$\begin{aligned}\langle e^{-iHt/\hbar}\varphi_z, He^{-iHt/\hbar}\varphi_z\rangle &= \langle \varphi_z, H\varphi_z\rangle = \hbar\omega\langle \mathbf{a}\varphi_z, \mathbf{a}\varphi_z\rangle + \hbar\omega/2 \\ &= \hbar\omega(|z|^2 + 1/2) = (p^2/2m) + m\omega^2 q^2/2 + \hbar\omega/2 .\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}H^2 &= \hbar^2\omega^2((\mathbf{a}^*\mathbf{a})^2 + \mathbf{a}^*\mathbf{a} + 1/4) = \hbar^2\omega^2((\mathbf{a}^*)^2(\mathbf{a})^2 + \mathbf{a}^*[\mathbf{a},\mathbf{a}^*]\mathbf{a} + \mathbf{a}^*\mathbf{a} + 1/4) \\ &= \hbar^2\omega^2((\mathbf{a}^*)^2(\mathbf{a})^2 + 2\mathbf{a}^*\mathbf{a} + 1/4)\end{aligned}$$

de modo que

$$\langle e^{-iHt/\hbar}\varphi_z, H^2 e^{-iHt/\hbar}\varphi_z\rangle = \langle \varphi_z, H^2\varphi_z\rangle = \hbar^2\omega^2(|z|^4 + 2|z|^2 + 1/4)$$

y, por lo tanto

$$\Delta_{e^{-iHt/\hbar}\varphi_z} H = \hbar\omega|z| = \hbar\omega\sqrt{\frac{\alpha^2}{2}q^2 + \frac{1}{2\alpha^2\hbar^2}p^2} .$$