Mecánica Cuántica I

Guía 5 – Abril de 2014

Problema 1: *Tratamiento analítico del problema del oscilador armónico.*

a) Verifique que, cuando el potencial al que se somete una partícula de masa m es $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ (donde $\omega > 0$ es constante), la ecuación de Schrödinger puede ser escrita como

$$\psi'' + (2\varepsilon - y^2)\,\psi = 0\ ,$$

donde $y = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ y $\varepsilon = E/\hbar\omega$, siendo E el correspondiente autovalor del hamiltoniano.
b) Observe que $\psi_o(y) = \exp(-y^2/2)$ es solución y analice entonces el Ansatz

$$\psi(y) = u(y)\, e^{-y^2/2}\ .$$

¿Qué condiciones deben imponerse a $u(y)$?
c) Use el método de Frobenius para resolver la ec. diferencial que determina a

$$u(y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, y^k$$

y encuentre la relación de recurrencia

$$C_{k+2} = C_k\, \frac{2k+1-2\varepsilon}{(k+2)(k+1)}$$

para los coeficientes.
d) Analice los límites $y \to \pm\infty$ para ver que los únicos valores permitidos para ε son $n + 1/2$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, obteniendo así el espectro de energías.
e) Vea entonces que la ecuación diferencial de b) para cada n es satisfecha por el polinomio de Hermite H_n. Derive la expresión general para las autofunciones

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\,\hbar\, 2^{2n} n!^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) H_n\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x\right)$$

Problema 2: Calcule la probabilidad de que la posición de un oscilador armónico en su estado fundamental tenga un valor mayor que la amplitud de un oscilador armónico clásico de la misma energía.

Problema 3: Para los autoestados $\{\psi_n\ :\ n = 0, 1, 2, , \cdots\}$ del oscilador armónico calcule $\langle \psi_m, a^\dagger \psi_n\rangle$ y $\langle \psi_m, a\psi_n\rangle$. Evalúe $\Delta X \cdot \Delta P$ para el autoestado ψ_n.

Problema 4: Para un oscilador armónico simple en una dimensión la función de onda a tiempo $t = 0$ está dada por

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_2$$

donde ψ_n es el autoestado del oscilador a la energía $\hbar\omega(n + 1/2)$.
a) Determine la función de onda $\psi(t)$ para tiempos $t > 0$.
b) Determine el valor de expectación de la energía.
c) Derive una expresión para los valores de expectación de la posición y el momento en función del tiempo.
d) ¿Es este un paquete de incerteza mínima? Justifique.

Problema 5: Dada la función de onda ϕ del oscilador armónico unidimensional al tiempo $t = 0$:
a) Encuentre su evolución temporal;
b) Calcule $\langle x \rangle_t$ en función del tiempo;
c) Calcule $\langle p \rangle_t$ en función del tiempo;
d) Verifique explicitamente el Teorema de Ehrenfest;
e) Muestre que $\langle x \rangle_t = \langle x \rangle_0 \cos(\omega t) + \frac{\langle p \rangle_0}{m\omega} \sin(\omega t)$.

Problema 6: *Estados coherentes.* Los autoestados del operador a se definen por la relación:

$$a\,\varphi_\alpha = \alpha \varphi_\alpha \quad ; \quad \text{donde } \alpha \text{ es un número complejo.}$$

a) Encuentre una expresión para los autoestados del operador a como combinación lineal de los autoestados ψ_n del oscilador armónico de masa m y frecuencia ω. Muestre que el operador a^* no tiene autoestados.
b) Muestre que estos estados pueden escribirse como

$$\varphi_\alpha = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp\left(\alpha\, a^*\right) \psi_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 - \alpha^2\right)\right) \exp\left(-i\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\alpha\hat{p}\right) \psi_0$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + \alpha^2\right)\right) \exp\left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\alpha\hat{x}\right) \psi_0$$

y también como

$$\varphi_\alpha = \exp\{\alpha a^* - \overline{\alpha} a\}\psi_0 \; .$$

c) Use los resultados del problema anterior para mostrar que estos estados son estados coherentes (de incerteza mínima) para los operadores posición y momento. Calcule la evolución temporal segun el Hamiltoniano del oscilador armónico para un estado coherente y para la relación de incerteza correspondiente. Compare esta evolución de un estado coherente con su evolución libre.
d) Muestre que los estados coherentes están dados por las funciones de onda

$$\psi(x,t) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} e^{i\phi(t)} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}[x - q(t)]^2 + i\frac{p(t)x}{\hbar}\right\}$$

donde $p(t)$ y $q(t)$ son, respectivamente, el momento y la posición de un oscilador armónico clásico de masa m y frecuencia angular ω. Calcule el valor de ϕ sabiendo que $\psi(x,t)$ es solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico asociado.
e) Calcule el valor esperado de la energía del oscilador armónico y su dispersión para un estado coherente.