Mecánica Cuántica I

Guía 6 – Mayo de 2014

Problema 1: Una partícula de masa m está restringida a moverse en una dimensión entre $x = -L/2$ y $x = L/2$, donde el potencial es nulo. Obtenga una cota para la energía del estado fundamental utilizando la función de prueba $\Psi_p(x) = a(x - L/2)(x + L/2)$. Compare con la solución exacta.

Problema 2: Considere el potencial unidimensional

$$V(x) = V_o \left(\frac{x^2}{2} - J \right) \exp\{-ax^2\} \ , \ ; a, J, V_o > 0 \ .$$

a) Determine (sin explicitar ninguna función de onda) una condición de existencia de estado ligado.
b) Utilice la función de prueba $\Psi(x) \propto \exp\{-bx^2\}$ ($b > 0$) para estimar la energía fundamental. Calcule la curva de existencia de estado ligado y compare con la obtenida en el punto a).

Problema 3: Considere el Hamiltoniano H del oscilador armónico de masa m y frecuencia angular ω y su estado fundamental

$$\phi_o(x) = \left(\frac{1}{x_o^2 \pi} \right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{2}(x/x_o)^2 \right] \ , \ \ x_o := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \ .$$

Aplique el método variacional de Ritz a las funciones

$$\psi_a^+(x) := \phi_o(x + a) \ , \ \ \psi_a^-(x) := \phi_o(x - a) \ , \ a \text{ real} \ \ .$$

a) Verifique que $\psi_a^{\pm}$ son linealmente independientes si y solo si $a \neq 0$.
b) Determine los valores estacionarios de

$$\|c_- \psi_a^- + c_+ \psi_a^+\|^{-2} \langle c_- \psi_a^- + c_+ \psi_a^+, H(c_- \psi_a^- + c_+ \psi_a^+) \rangle \ , \ \ c_\pm \in \mathbb{C}$$

y grafiquelos como función de $a > 0$. Determine los coeficientes respectivos.
c) Demuestre que

$$\|\psi_a^- - \psi_a^+\|^{-2} \langle \psi_a^- - \psi_a^+, H(\psi_a^- - \psi_a^+) \rangle \geq E_1$$

donde E_1 es la energía del primer estado excitado del oscilador. Determine el valor de a que minimiza esta cota.
d) Comente sobre en que medida los valores estacionarios son aproximaciones a los dos primeros estados ligados. Obtenga el valor de $a > 0$ tal que la suma de los módulos de las diferencias sea minimal.

Problema 4: *Teorema de Hellmann-Feynman:*
a) Pruebe que si un Hamiltoniano depende de un parametro λ y ψ_λ es un autovector normalizado $H(\lambda)\psi_\lambda = E(\lambda)\psi_\lambda$, (asumiendo condiciones apropiadas de diferenciabilidad de $H(\cdot), E(\cdot)$ y $\psi_\cdot$), entonces

$$\frac{dE}{d\lambda}(\lambda) = \langle \psi_\lambda, (dH/d\lambda)(\lambda)\psi_\lambda \rangle \ .$$

b) Muestre que si $H = T + \lambda V$ donde el potencial V es positivo, la energía de los estados ligados si existen son funciones no-decrecientes del parámetro λ.

Problema 5: Verifique que si A es un operador autoadjunto actuando en un espacio de Hilbert de dimensión finita n, y $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ $(k \leq n)$ son todos sus autovalores, entonces

$$\alpha_1 \leq \text{mín}\{A_{j,j} : \ j = 1, 2, \cdots, n\} \leq \text{máx}\{A_{j,j} : \ j = 1, 2, \cdots, n\} \leq \alpha_k$$

con $A_{j,j} = \langle \psi_j, A\psi_j \rangle$ para $j = 1, 2, \cdots, n$ donde $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}$ es un conjunto maximal de vectores linealmente independientes y normalizados.

Problema 6: La matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ \bar{b} & 2 \end{pmatrix}$$

es manifiestamente hermítica cualquiera sea $b \in \mathbb{C}$. Obtenga cotas superiores e inferiores para sus autovalores usando, por ejemplo el resultado del problema anterior y la desigualdad de Temple.

Problema 7: Probar que el operador $\widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ es el generador de las traslaciones $(U_{\mathbf{a}}\psi)(\mathbf{r}) := \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Problema 8: Compruebe que el operador de dilatación homogenea

$$(U_\lambda \psi)(\mathbf{x}) := \lambda^{-d/2} \psi(\mathbf{x}/\lambda) \ , \quad \lambda > 0 \ , \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

es unitario y verifique que

$$U_\lambda^* \widehat{\mathbf{x}} U_\lambda = \lambda \widehat{\mathbf{x}} \ , \quad U_\lambda^* \widehat{\mathbf{p}} U_\lambda = \lambda^{-1} \widehat{\mathbf{p}} \ .$$