Mecánica Cuántica I

Guía 7 - Mayo/Junio de 2014

Problema 1.
a) Escriba las componentes cartesianas del operador momento angular orbital $\widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{r}} \wedge \widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar\, \widehat{\mathbf{r}} \wedge \nabla$ y de los operadores L_+, L_- y $\widehat{\mathbf{L}}^2$ en coordenadas esféricas.
b) Use que las autofunciones de $\widehat{\mathbf{L}}^2$ y $\widehat{L}_z$ tienen la forma $Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \Theta_{\ell,m}(\theta)\, \exp{(im\varphi)}$ para encontrar Y_ℓ^ℓ, sabiendo que $L_+ Y_\ell^\ell = 0$. Muestre que todas las autofunciones de $\widehat{\mathbf{L}}^2$ pueden ser obtenidas de esta manera usando lo encontrado en inciso (a).
c) Suponga que ℓ puede tomar valores semienteros, calcule entonces $Y_{1/2}^{1/2}$ como se describe en el inciso (b), y $Y_{1/2}^{-1/2}$ utilizando L_-. Luego calcule $Y_{1/2}^{-1/2}$ a partir de la ecuación $L_- Y_{1/2}^{-1/2} = 0$ y muestre que arroja resultados contradictorios. Esto puede tomarse como argumento de la ausencia de valores semienteros para el momento angular orbital.

Problema 2. Mostrar que si un sistema está el autoestado $|\ell, m\rangle$ de los operadores $\widehat{\mathbf{L}}^2$, $\widehat{L}_z$, el valor esperado de la componente del operador momento angular orbital a lo largo de una dirección $\mathbf{n}$ de ángulo polar θ, es igual a $m\hbar\cos(\theta)$.

Problema 3. Analice el producto de las dispersiones de las componentes $\widehat{L}_x$ y $\widehat{L}_y$ para un autoestado $|\ell, m\rangle$ de los operadores $\widehat{\mathbf{L}}^2$, $\widehat{L}_z$. ¿Cuándo es mínimo o máximo?

Problema 4. Sea P el operador paridad dado por $(Pf)(\mathbf{r}) = f(-\mathbf{r})$. Verifique, que en coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) se tiene

$$(Pf)(r,\theta,\phi) = f(r, \pi-\theta, \phi+\pi)$$

Mostrar que $[P, \widehat{\mathbf{L}}] = 0$ y que los armónicos esféricos Y_ℓ^m tienen paridad definida, la cual depende sólo del número cuántico ℓ.

Problema 5.
a) Pruebe que los operadores $\widehat{\mathbf{r}}$, $\widehat{\mathbf{p}}$, $\widehat{\mathbf{L}}$ actuando en $L^2(\mathbb{R}^3)$ son vectoriales y que $\widehat{\mathbf{r}}^2$ y $\widehat{\mathbf{p}}^2$ son operadores escalares.
b) Pruebe que si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ son operadores vectoriales,entonces $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ es un operador escalar.
c) Pruebe que para que un operador A conmute con todas las componentes de $\widehat{\mathbf{L}}$, es suficiente que conmute con dos de ellas.

Problema 6. Una partícula interactúa con un campo externo de manera tal que el Hamiltoniano está dado por

$$H = \alpha\, L_x \quad ; \alpha > 0,$$

En $t = 0$ su estado está dado por

$$\psi \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\,|0,0\rangle_z + |1,1\rangle_z)$$

donde el miembro de la derecha está expresado en términos de las autofunciones $|l,m\rangle_z$ comunes del par $\widehat{\mathbf{L}}^2$ y $\widehat{L}_z$.
a) Encuentre el espectro de energías para este Hamiltoniano.
b) Conociendo que

$$L_+|\ell,m\rangle_z = \hbar\sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}|\ell,m+1\rangle_z$$
$$L_-|\ell,m\rangle_z = \hbar\sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}|\ell,m-1\rangle_z\ ,$$

utilice algún argumento para establecer que

$$J_+|\ell,m_x\rangle_x = \hbar\sqrt{(\ell-m_x)(\ell+m_x+1)}\,|\ell,m_x+1\rangle_x$$
$$J_-|\ell,m_x\rangle_x = \hbar\sqrt{(\ell+m_x)(\ell-m_x+1)}\,|\ell,m_x-1\rangle_x$$

donde $J_\pm \equiv L_y \pm iL_z$ y $L_x|\ell,m_x\rangle_x = \hbar m_x|\ell,m_x\rangle_x$.
c) Exprese ψ en la base $|\ell,m_x\rangle_x$ y calcule $\psi(t)$ para todo t.

Problema 7. Para un estado representado por la función de onda

$$\psi(x, y, z) \;=\; Ne^{-\alpha r^2}(x + y)z \;, \quad \alpha > 0 \;,$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
a) determine la constante de normalización N en términos del parámetro α;
b) calcule los valores esperados y dispersiones de $\widehat{\mathbf{L}}$ y de $\widehat{\mathbf{L}}^2$.

Problema 8. Verifique que cualquiera sea el par $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ de vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ los operadores $\mathbf{f} \cdot \widehat{\mathbf{L}}$ y $\mathbf{g} \cdot \widehat{\mathbf{L}}$ son unitariamente equivalentes y tienen, por ende, el mismo espectro. *Sugerencia:* recuerde la ley de transformación de $\widehat{\mathbf{L}}$ bajo rotaciones.

Problema 9. Representación matricial del momento angular. Considere el momento angular para una partícula $\widehat{\mathbf{L}}$ actuando en el espacio de las funciones de módulo cuadrado integrable sobre la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{E}_1$ el autoespacio de $\widehat{\mathbf{L}}^2$ con $\ell = 1$.
a) Cerciorese que $\mathcal{E}_1$ es invariante bajo la acción de $\widehat{L}_z, \widehat{L}_\pm, \widehat{L}_x, \widehat{L}_y$ y, generalmente, de cualquier operador que sea función de $\widehat{\mathbf{L}}$. ¿Porqué?
b) Encuentre las matrices que representan a $\widehat{\mathbf{L}}^2, \widehat{L}_z, \widehat{L}_\pm, \widehat{L}_x, \widehat{L}_y$ en $\mathcal{E}_1$.
c) Use las matrices para verificar las relaciones de conmutación $[\widehat{L}_j, \widehat{L}_k] = i\hbar\epsilon_{j,k,m}\widehat{L}_m$ en $\mathcal{E}_1$.
d) Verifique que, en $\mathcal{E}_1$, $\widehat{L}_z^3 = \hbar^2 \widehat{L}_z$.
e) Demuestre que el operador unitario de rotaciones $U_{(\mathbf{e},\alpha)} = \exp\{-i\alpha\mathbf{e} \cdot \widehat{\mathbf{L}}\}$ en $\mathcal{E}_1$ está dado por

$$U_{(\mathbf{e},\alpha)} = \mathbf{1} + (\cos(\alpha) - 1)A^2 - i\sin(\alpha)A \;,$$

con $A := \mathbf{e} \cdot \widehat{\mathbf{L}}/\hbar$.