Mecánica Cuántica I

Guía 8 – Junio de 2014

Problema 1: Encontrar las autofunciones de una partícula libre en tres dimensiones. Comparar las autofunciones basadas en el conjunto de observables H, $\widehat{\mathbf{L}}^2$ y $\widehat{L}_z$, con las autofunciones de ondas planas en la cual el movimiento está caracterizado por los observables H, $\widehat{\mathbf{p}}$.

Problema 2: Determine la condición para los autovalores de un sistema tridimensional en el pozo (central) de potencial

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Compare la ecuación resultante para estados S ($\ell = 0$) con la obtenida para el pozo unidimensional y escriba una condición de existencia para estados ligados. Determine una condición para existencia de estados ligados con $\ell > 0$.

Problema 3: Argumente para probar que en un potencial central el estado fundamental de una partícula ligada es un estado S ($\ell = 0$).

Problema 4: Considere un oscilador tridimensional isotrópico cuántico, es decir una partícula de masa μ sometida a un potencial radial $V(r) = kr^2/2$, donde $k > 0$ tiene la dimensión *energía /distancia*^{2}.
a) Resuelva la ecuación de Schrödinger en coordenadas cartesianas, mediante separación de variables. Verifique que los niveles de energía E_n , $n = 0, 1, 2 \cdots$, enumerados de modo que $E_0 < E_1 < E_2 \cdots$ tienen multiplicidad $(n + 1)(n + 2)/2$.

Para resolver el problema radial en coordenadas esféricas, se propone la siguiente función :

$$\psi(r) = r^\ell \exp\left(-\frac{\mu\omega}{2\hbar} r^2\right) f(r) ,$$

donde $\omega := \sqrt{k/\mu}$.
b) Muestre que la ecuación que resulta para $f(r)$ permite expresar a $f(r)$ como polinomios asociados de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$, los que satisfacen la ecuación diferencial

$$x\,(L_n^{(\alpha)})''(x) + (\alpha + 1 - x)\,(L_n^{(\alpha)})'(x) + n\,L_n^{(\alpha)}(x) = 0$$

(con n entero), para lo cual es conveniente utilizar la energía reducida $\epsilon = 2E/\hbar\omega$ y adimensionalizar a la variable r.
c) Escriba entonces los correspondientes autovalores para la energía y encuentre la correspondencia entre los números cuánticos del punto (a) y del (b) (vea la figura 1).
d) Para los dos autovalores más bajos de energía relacione las autofunciones halladas mediante los dos métodos. Escriba tambien la autofunción con $\ell = 2$, $m = 0$ cuya parte radial presenta un nodo como expansión de las correspondientes autofunciones en coordenadas cartesianas.

Problema 5: *Tratamiento analítico del problema del átomo hidrogenoide*
Supongamos que V es la energía potencial de atracción de Coulomb entre una carga fija Ze_o y una partícula de carga $-e_o$, es decir, $V(r) = -Z\,e_o^2/r$. Se buscan los autovalores.
a) Verifique que la ecuación radial reducida para este problema es de la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{du^2(r)}{dr^2} + \left(\frac{\hbar^2\,\ell(\ell+1)}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r}\right) u(r) = Eu(r)$$

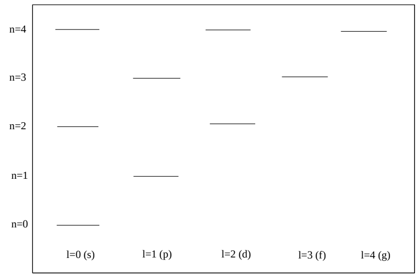

Figure 1: Espectro del oscilador armónico isotrópico en tres dimensiones en términos de (n, ℓ).

b) Estudie los límites $r \to 0$ y $r \to \infty$. Analice entonces para la solución general

$$u(\rho) = \rho^{l+1}\; e^{-\rho} w(\rho), \text{ donde } \rho = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} r \;;$$

¿ qué condiciones deben imponerse a w?
c) Verifique que la ecuación resultante para w es

$$\rho w''(\rho) + 2(\ell + 1 - \rho) w'(\rho) + (\rho_0 - 2\ell - 2) w(\rho) = 0 \;, \;\; \rho_0 := \sqrt{2m} Z e_o^2 / (\sqrt{|E|}\hbar) \;.$$

d) Use el método de Frobenius para determinar w. Verifique que la relación de recurrencia para los coeficientes a_k asociados con ρ^k es

$$a_{k+1} = a_k \frac{2(k + \ell + 1) - \rho_0}{(k+1)(k + 2\ell + 2)}.$$

e) Analice nuevamente los límites asintóticos para ver que se tiene que cumplir la condición

$$\rho_0 = 2(N + l + 1), \text{con } \;\; N = 0, 1, 2, ..$$

f) Muestre que la energía resultante es

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{2\hbar n^2};$$

¿qué dependencia tiene n con ρ_0, N y ℓ?
g) Obtenga explícitamente las funciones de onda radiales del átomo de hidrógeno para $n = 1, 2, 3$. Grafíquelas.

Problema 6: Muestre que la suma de un pequeño término proporcional a $1/r^2$ al potencial de Coulomb remueve la degeneración de los estados con diferente ℓ. Los niveles de energía aún están dados por una fórmula del tipo de Balmer, pero n difiere de un entero en una cantidad dependiente de ℓ.

Problema 7: Considere una partícula moviéndose en un potencial central atractivo de la forma (Yukawa o Coulomb apantallado):

$$V(r) = -V_o \frac{e^{-r/a}}{r/a}$$

con V_o, $a > 0$ con dimensiones de una *energía* y, respectivamente, una *distancia*. Aplique el método variacional usando como función de prueba $R(r) = e^{-\beta r/a}$ con el parámetro adimensional β variable. Obtenga la "mejor" función de prueba de esta forma y deduzca una relación entre β y $2\mu V_o a^2/\hbar^2$ que permita garantizar la existencia de un estado ligado. Evalúe β y determine una cota superior a la energía fundamental cuando $2\mu V_o a^2/\hbar^2 = 2,7$.
Muestre que en el límite del potencial de Coulomb especificado por $V_o \to 0$, $a \to \infty$ pero con $V_o\, a$ finito) se obtienen la energía y la función de onda correctas para el átomo de hidrógeno.