Mecánica Cuántica I

Segundo Parcial – 6 de Junio de 2014

Solución – G.A. Raggio

Problema 1. Considere una partícula de masa m en el potencial unidimensional $V(x) = k|x|$, donde $k > 0$ tiene la dimensión de una fuerza.
a) ¿Que puede esperarse sobre el espectro del Hamiltoniano? ¿Que simetrías tiene?
b) Suponiendo que el Hamiltoniano admite a los menos un autovalor discreto E_1 en el fondo de su espectro, determine una aproximación a esta autoenergía usando solamente la función

$$\phi_a(x) = x \exp\{-(x/a)^2\} \,,$$

–donde a es real positivo con dimensión de una longitud– y la fórmula integral[1]

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^2}\, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{2^{1+n/2}}\sqrt{\pi} & , \quad n \text{ par} \\ \\ \dfrac{((n-1)/2)!}{2} & , \quad n \text{ impar} \end{cases} .$$

c) Si ahora se sabe que hay otro autovalor discreto E_2 con $E_2 > E_1$ y el intervalo (E_1, E_2) no contiene valores espectrales, muestre que la aproximación de E_1 del item b) es una cota superior a E_2.

Solución: a) Como V es positivo, el Hamiltoniano $H = (1/2m)\widehat{p}^2 + \widehat{V}$ es acotado por debajo; porque $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$ se espera que el espectro sea puramente discreto (autovalores aislados de multiplicidad finita) y simple (pues el problema es unidimensional). Ya que el potencial es par, el Hamiltoniano conmuta con el unitario $(\Pi f)(x) = f(-x)$. Por ello las autofunciones si existen son alternativamente pares e impares, siendo par la autofunción de mínima energía.
Además, considerando el unitario de dilatación $(U_\lambda f)(x) = \lambda^{-1/2} f(x/\lambda)$ que cumple $U_\lambda^* \widehat{x} U_\lambda = \lambda\widehat{x}$ y $U_\lambda^* \widehat{p} U_\lambda = \lambda^{-1}\widehat{p}$, obtenemos –escribimos $H = H[m, k]$ cuando queremos poner de manifiesto lsa dependencia de H de m y k–

$$U_\lambda^* H U_\lambda = \frac{1}{2m\lambda^2}\widehat{p}^2 + \lambda k|\widehat{x}| \,,$$

de modo que, por la invariancia del espectro bajo transformaciones unitarias, se tiene

$$\mathrm{spec}\,(H[m,k]) = \mathrm{spec}\,(H[m\lambda^2, \lambda k]) = \lambda^{-2}\,\mathrm{spec}\,(H[m, \lambda^3 k]) = \lambda\,\mathrm{spec}\,(H[m\lambda^3, k])$$

y eligiendo λ convenientemente,

$$\mathrm{spec}\,(H[m,k]) = \sqrt[3]{k^2/m}\;\; \mathrm{spec}\,(H[1,1]) \,,$$

lo que determina la dependencia de putativos autovalores de los parámetros k y m.

b) Calculamos las integrales necesarias. Observe que $\langle f, f''\rangle = -\langle f', f'\rangle = -\|f'\|^2$ si tanto f como f' y f'' son de módulo cuadrado integrable (integración por partes).

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_a(x)|^2\, dx = \frac{a^3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \,, \quad \int_{\mathbb{R}} |\phi_a'(x)|^2\, dx = \frac{3a}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \,, \quad \langle \phi_a, \widehat{V}\phi_a\rangle = \frac{ka^4}{4} \,.$$

[1] El doble factorial $p!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p$ de un natural impar p es el producto de todos los impares menores o iguales a p.

Con esto:

$$\alpha(a) := \frac{\langle \phi_a, H\phi_a\rangle}{\|\phi_a\|^2} = a\left(\frac{3\hbar^2}{2ma^3} + k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) .$$

Por el Principio variacional,

$$\alpha(a) \geq E_1 ,$$

para todo $a > 0$ y, a fortiori,

$$E_1 \leq E := \inf_{a>0} \alpha(a) .$$

Para calcular el infimo E, observamos que α es una función convexa diferenciable que, si su derivada tiene un cero, en ese cero se asume necesariamente el infimo. Obtenemos

$$E = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{6\hbar^2 k^2}{m\pi}} .$$

Oservamos que la dependencia en k y m es la correcta.
c) Como H y Π conmutan, el subespacio $\mathcal{H}_-$ de $L^2(\mathbb{R})$ constituido por las funciones impares, es invariante ante H ya que $\mathcal{H}_-$ es el autoespacio de Π al autovalor -1. Por lo tanto, si H_- denota la restricción de H a $\mathcal{H}_-$ el Principio Variacional nos da, teniendo en cuenta que $\phi_a \in \mathcal{H}_-$,

$$E_2 = \inf spec(H_-) \leq \alpha(a) \ , \quad E_2 \leq E .$$

Problema 2: Considere un oscilador armónico cuya función de onda a $t = 0$ está dada por,

$$\Psi = \frac{5}{\sqrt{50}}\phi_0 + \frac{4}{\sqrt{50}}\phi_1 + \frac{3}{\sqrt{50}}\phi_3$$

donde ϕ_n es autofunción del oscilador armónico de frecuencia ω y masa m al autovalor $\hbar\omega(n + 1/2)$.
a) Encuentre el estado Ψ_t para $t \neq 0$.
b) Encuentre el valor de expectación del operador número N y la energía media de este sistema.
c) Encuentre el valor de expectación del operador $\widehat{x}$ para todo t suponiendo que las fases de las autofunciones son tales que $a\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1}$ donde $a = (1/\sqrt{2})[\lambda\widehat{x} + (i/\hbar\lambda)\widehat{p}]$, $\lambda = \sqrt{m\omega/\hbar}$.

Solución: a) Como $e^{-iHt/\hbar}\phi_n = e^{-i(2n+1)\omega t/2}\phi_n$

$$\Psi_t = e^{-iHt/\hbar} = \frac{5e^{-i\omega t/2}}{\sqrt{50}}\phi_o + \frac{4e^{-i3\omega t/2}}{\sqrt{50}}\phi_1 + \frac{3e^{-i7\omega t/2}}{\sqrt{50}}\phi_3 = c_o(t)\phi_o + c_1(t)\phi_1 + c_3(t)\phi_3$$

con las definiciones obvias de los coeficientes c_o, c_1 y c_3.
b) Ya que $N\phi_n = n\phi_n$, se tiene $N\Psi_t = c_1(t)\phi_1 + 3c_3(t)\phi_3$ y entonces

$$\langle \Psi_t, N\Psi_t\rangle = \langle c_o(t)\phi_o + c_1(t)\phi_1 + c_3(t)\phi_3, c_1(t)\phi_1 + 3c_3(t)\phi_3\rangle = |c_1(t)|^2 + 3|c_3(t)|^2 = 43/50 .$$

Y, como $H = \hbar\omega(N + \mathbf{1}/2)$, $\langle \Psi_t, H\Psi_t\rangle = (68/50)\hbar\omega$.
c) Para cualquier n tenemos

$$\langle \phi_n, \widehat{x}\phi_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} x|\phi_n(x)|^2 \, dx$$

pero $\phi_n(-x) = (-)^n\phi_n$ de modo que $x \mapsto |\phi_n(x)|$ es par y el integrando $x \mapsto x|\phi_n(x)|^2$ es impar. Además, como

$$|\phi_n(x)|^2 = (\text{Polinomio de orden } 2n)e^{-ax^2}$$

la integral existe y por la paridad es nula. Luego,

$$\langle \Psi_t, \widehat{x}\Psi_t\rangle = \langle c_o(t)\phi_o + c_1(t)\phi_1 + c_3(t)\phi_3, \widehat{x}(c_o(t)\phi_o + c_1(t)\phi_1 + c_3(t)\phi_3)\rangle$$

$$= 2Re\{\overline{c_o(t)}c_1(t)\langle\phi_0,\widehat{x}\phi_1\rangle + \overline{c_o(t)}c_3(t)\langle\phi_0,\widehat{x}\phi_3\rangle + \overline{c_1(t)}c_3(t)\langle\phi_1,\widehat{x}\phi_3\rangle\}\ .$$

Usando la relación $\widehat{x} = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}\ (a + a^*)$ y la relación $a\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1}$ obtenemos[2]

$$\langle\phi_0,\widehat{x}\phi_1\rangle = \sqrt{2\hbar/(m\omega)}\left(\langle\phi_0,\underbrace{a\phi_1}_{=\phi_o}\rangle + \langle\underbrace{a\phi_o}_{=0},\phi_1\rangle\right) = \sqrt{2\hbar/(m\omega)}\ ;$$

$$\langle\phi_0,\widehat{x}\phi_3\rangle = \sqrt{2\hbar/(m\omega)}\left(\langle\phi_0,\ \underbrace{a\phi_3}_{=\sqrt{3}\phi_2}\ \rangle + \langle a\phi_o,\phi_3\rangle\right) = 0\ ;$$

$$\langle\phi_1,\widehat{x}\phi_3\rangle = \sqrt{2\hbar/(m\omega)}\,(\langle\phi_1,a\phi_3\rangle + \langle a\phi_1,\phi_3\rangle) = 0\ ;$$

de modo que

$$\langle\Psi_t,\widehat{x}\Psi_t\rangle = 2Re\{\overline{c_o(t)}c_1(t)\sqrt{2\hbar/(m\omega)}\} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}Re(e^{i\omega t/2}e^{-i3\omega t/2}) = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\ \cos(\omega t)\ .$$

Problema 3: Considere una partícula cuántica en un potencial $V(\mathbf{r})$.
a) Verifique que el momento angular orbital $\widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{r}}\wedge\widehat{\mathbf{p}}$ conmuta con el operador energía cinética.
b) Determine la ecuación de movimiento en la representación de Heisenberg para el momento angular orbital $\widehat{\mathbf{L}}$. Compare con la correspondiente ecuación de la mecánica clásica y comente sobre la validez del Teorema de Ehrenfest.
c) Muestre que si el potencial es central, i.e., V depende solamente de $|\mathbf{r}|$, entonces $\widehat{\mathbf{L}}$ es una constante de movimiento.

Solución: a) Doy tres variantes para esto.
(i) *La elegante y eficiente:* con $U_{(\mathbf{e},\alpha)} = \exp\{-i\alpha\mathbf{e}\cdot\widehat{\mathbf{L}}/\hbar\}$ se tiene

$$U^*_{(\mathbf{e},\alpha)}\widehat{\mathbf{p}}U_{(\mathbf{e},\alpha)} = D(\mathbf{e},\alpha)\widehat{\mathbf{p}}\ ,$$

y por ende

$$U^*_{(\mathbf{e},\alpha)}\widehat{\mathbf{p}}^{\,2}U_{(\mathbf{e},\alpha)} = (D(\mathbf{e},\alpha)\widehat{\mathbf{p}})\cdot(D(\mathbf{e},\alpha)\widehat{\mathbf{p}}) = \widehat{\mathbf{p}}^{\,2}$$

ya que D es ortogonal. Derivando con respecto a α, obtenemos

$$(i/\hbar)[\mathbf{e}\cdot\widehat{\mathbf{L}},\widehat{\mathbf{p}}^{\,2}] = 0\ ,$$

y de aquí, ya que el vector unitario $\mathbf{e}$ es arbitrario, que $[\widehat{L}_j,\widehat{\mathbf{p}}^{\,2}] = 0$. Esta variante demuestra exactamente lo que se pide; ni más ni menos.
(ii)*La obvia pero interesante:* En mecánica clásica $\mathbf{p}$ es perpendicular a $\mathbf{L} = \mathbf{r}\wedge\mathbf{p}$ y por ende $\mathbf{L}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{L} = \mathbf{O}$. ¡Si esto no fuere cierto en mecánica cuántica entonces habría problemas! Pero, observe que las fórmulas para el producto triple $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$ no se pueden trasladar ciegamente. Calculamos,

$$(\widehat{\mathbf{r}}\wedge\widehat{\mathbf{p}})\cdot\widehat{\mathbf{p}} = \sum_{j=1}^{3}(\widehat{\mathbf{r}}\wedge\widehat{\mathbf{p}})_j\widehat{p}_j = \sum_{j=1}^{3}(\sum_{k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\ \widehat{r}_k\widehat{p}_\ell)\widehat{p}_j = \sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\ \widehat{r}_k\widehat{p}_\ell\widehat{p}_j$$

$$= -\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{k,j,\ell}\ \widehat{r}_k\widehat{p}_j\widehat{p}_\ell = -\sum_{k=1}^{3}\widehat{r}_k(\widehat{\mathbf{p}}\wedge\widehat{\mathbf{p}})_k = -\widehat{\mathbf{r}}\cdot(\widehat{\mathbf{p}}\wedge\widehat{\mathbf{p}}) = 0\ ;$$

[2]Se podrían usar las relaciones generales $\langle\phi_n,a\phi_k\rangle = \sqrt{k}\delta_{n,k-1}$ y $\langle a\phi_n,\phi_k\rangle = \sqrt{n}\delta_{n-1,k}$.

y también, con un paso adicional

$$\widehat{\mathbf{p}}\cdot(\widehat{\mathbf{r}}\wedge\widehat{\mathbf{p}}) = \sum_{j=1}^{3}\widehat{p}_j(\widehat{\mathbf{r}}\wedge\widehat{\mathbf{p}})_j = \sum_{j=1}^{3}\widehat{p}_j(\sum_{k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\,\widehat{r}_k\widehat{p}_\ell) = \sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\,\widehat{p}_j\widehat{r}_k\widehat{p}_\ell$$

$$= \sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\,([\widehat{p}_j,\widehat{r}_k]+\widehat{r}_k\widehat{p}_j)\widehat{p}_\ell = -i\hbar\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\,\delta_{j,k}\,\widehat{p}_\ell\ -\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{k,j,\ell}\,\widehat{r}_k\widehat{p}_j\widehat{p}_\ell$$

$$= -i\hbar\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,j,\ell}\,\widehat{p}_\ell - \sum_{k=1}^{3}\widehat{r}_k(\widehat{\mathbf{p}}\wedge\widehat{\mathbf{p}})_k = -\widehat{\mathbf{r}}\cdot(\widehat{\mathbf{p}}\wedge\widehat{\mathbf{p}}) = 0\ .$$

O sea que la fórmula clásica persiste:

$$\widehat{\mathbf{L}}\cdot\widehat{\mathbf{p}} = \widehat{\mathbf{p}}\cdot\widehat{\mathbf{L}} = 0\ . \tag{1}$$

Entonces, a fortiori, $[\widehat{\mathbf{L}},\widehat{\mathbf{p}}] = \widehat{\mathbf{L}}\cdot\widehat{\mathbf{p}} - \widehat{\mathbf{p}}\cdot\widehat{\mathbf{L}} = 0$, y

$$[\widehat{\mathbf{L}},\widehat{\mathbf{p}}^2] = \widehat{\mathbf{p}}\cdot[\widehat{\mathbf{L}},\widehat{\mathbf{p}}] + [\widehat{\mathbf{L}},\widehat{\mathbf{p}}]\cdot\widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{O}\ .$$

Esta variante es más rica pues nos enseña (1) de donde obtenemos lo que se pedía.
(iii) *La mecánica y aburrida:* Calculamos

$$[\widehat{L}_j,\widehat{p}_k] = \sum_{m,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,m,\ell}\,[\widehat{x}_m\widehat{p}_\ell,\widehat{p}_k] = \sum_{m,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,m,\ell}\,(\widehat{x}_m[\widehat{p}_\ell,\widehat{p}_k] + [\widehat{x}_m,\widehat{p}_k]\widehat{p}_\ell)$$

$$= i\hbar\sum_{m,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,m,\ell}\,\delta_{m,k}\,\widehat{p}_\ell = i\hbar\sum_{\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\,\widehat{p}_\ell\ ;$$

de modo que

$$[\widehat{L}_j,\widehat{p}_k^2] = \widehat{p}_k[\widehat{L}_j,\widehat{p}_k] + [\widehat{L}_j,\widehat{p}_k]\widehat{p}_k = 2i\hbar\sum_{\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\,\widehat{p}_k\widehat{p}_\ell = 2i\hbar(\widehat{\mathbf{p}}\wedge\widehat{\mathbf{p}})_j = 0\ .$$

Esto prueba mucho más que lo pedido: cada componente de $\widehat{\mathbf{L}}$ conmuta con el cuadrado de cada componente de $\widehat{\mathbf{p}}$.

b) El Hamiltoniano del sistema es $H = \widehat{T} + \widehat{V}$ donde $\widehat{V}$ denota el operador de multiplicación por $V(\mathbf{r})$ y $\widehat{T} = (1/2m)\widehat{\mathbf{p}}^2$ es el operador asociado con la energía cinética. La ec.de movimiento en la representación de Heisenberg para el momento angular es, usando el resultado anterior,

$$\frac{d\widehat{\mathbf{L}}}{dt}(t) = \frac{i}{\hbar}[H,\widehat{\mathbf{L}}(t)] = \frac{i}{\hbar}[H,\widehat{\mathbf{L}}](t) = i\hbar[\widehat{T},\widehat{\mathbf{L}}](t) + i\hbar[\widehat{V},\widehat{\mathbf{L}}](t) = i\hbar[\widehat{V},\widehat{\mathbf{L}}](t)$$ [3].

Recordando que $[f(\widehat{\mathbf{r}}),\widehat{\mathbf{p}}] = i\hbar(\nabla f)(\widehat{\mathbf{r}})$,

$$[\widehat{V},\widehat{L}_j] = \sum_{k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\,[V(\widehat{\mathbf{r}}),\widehat{r}_k\widehat{p}_\ell] = \sum_{k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}\,(\widehat{r}_k[V(\widehat{\mathbf{r}}),\widehat{p}_\ell]] + [V(\widehat{\mathbf{r}}),\widehat{r}_k]\widehat{p}_\ell)$$

[3] Acá, hay que estar atento. Observe que cualquiera sea la observable A, con $A(t) := U_t^*AU_t$, $U_t := e^{-iHt/\hbar}$, se tiene

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{i}{\hbar}[H,A(t)] = \frac{i}{\hbar}[H,A](t)$$

ya que $[H,A](t) = U_t^*[H,A]U_t = [H(t),A(t)] = [H,A(t)]$. Pero

$$[\widehat{V},\widehat{\mathbf{L}}(t)] \neq [\widehat{V}(t),\widehat{\mathbf{L}}(t)] = [\widehat{V},\widehat{\mathbf{L}}](t)\ \ .$$

$$= i\hbar \sum_{k,\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell}\, \widehat{r}_k (\nabla V)_\ell(\widehat{\mathbf{r}}) = i\hbar (\widehat{\mathbf{r}} \wedge (\nabla V)(\widehat{\mathbf{r}}))_j \ ;$$

o sea $[\widehat{V}, \widehat{\mathbf{L}}] = i\hbar(\widehat{\mathbf{r}} \wedge (\nabla V)(\widehat{\mathbf{r}}))$ y entonces

$$\frac{d\widehat{\mathbf{L}}}{dt}(t) = \{\widehat{\mathbf{r}} \wedge (-\nabla V)(\widehat{\mathbf{r}})\}\,(t) = \{\widehat{\mathbf{r}}(t)\} \wedge \{(-\nabla V)(\widehat{\mathbf{r}})(t)\} \ .$$

Pero $-\nabla V$ es la fuerza $\mathbf{F}$ y $\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$ el momento de fuerza ("torque" en inglés) de modo que se obtiene la versión cuantizada de la ec. de movimiento clásica

$$\frac{d\widehat{\mathbf{L}}}{dt}(t) = \left\{\widehat{\mathbf{r}} \wedge \widehat{\mathbf{F}}\right\}(t) = \{\widehat{\mathbf{r}}(t)\} \wedge \left\{\widehat{\mathbf{F}}(t)\right\} \ .$$

El Teorema de Ehrenfest es por supuesto correcto y dice que la derivada del valor esperado del momento angular es igual al valor esperado del momento de fuerza.
c) Si $V(\mathbf{r}) = v(r)$, $r := |\mathbf{r}|$ entonces

$$\frac{\partial V}{\partial r_j} = v'(r) \frac{\partial r}{\partial r_j} = v'(r) r_j / r \ ,$$

donde v' denota la derivada de v; o sea:

$$(\nabla V)(\mathbf{r}) = \frac{v'(r)}{r} \mathbf{r} \ .$$

Entonces la fuerza es centrípeta o centrífuga (paralela o anti-paralela a $\mathbf{r}$) y $\widehat{\mathbf{r}} \wedge \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{O}$ con lo cual $\frac{d\widehat{\mathbf{L}}}{dt}(t) = \mathbf{O}$ y por ende $\widehat{\mathbf{L}}(t) = \widehat{\mathbf{L}}$.
Lo mismo se obtiene –mucho más rapidamente– del siguiente argumento. Ya que con $U_{(\mathbf{e},\alpha)} = \exp\{-i\alpha \mathbf{e} \cdot \widehat{\mathbf{L}}/\hbar\}$ se tiene

$$U^*_{(\mathbf{e},\alpha)} \widehat{\mathbf{r}} U_{(\mathbf{e},\alpha)} = D(\mathbf{e}, \alpha) \widehat{\mathbf{r}} \ ,$$

y por ende

$$U^*_{(\mathbf{e},\alpha)} f(\widehat{\mathbf{r}}) U_{(\mathbf{e},\alpha)} = f(D(\mathbf{e}, \alpha)\widehat{\mathbf{r}})$$

para una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, tenemos

$$U^*_{(\mathbf{e},\alpha)} V(\widehat{\mathbf{r}}) U_{(\mathbf{e},\alpha)} = V(D(\mathbf{e},\alpha)\widehat{\mathbf{r}}) = v(|D(\mathbf{e},\alpha)\widehat{\mathbf{r}}|) = v(|\widehat{\mathbf{r}}|) = V(\widehat{\mathbf{r}}) \ ;$$

derivando con respecto a α obtenemos $(i/\hbar)[\mathbf{e} \cdot \widehat{\mathbf{L}}, V(\widehat{\mathbf{r}})] = 0$. Como $\mathbf{e}$ es un vector unitario arbitrario, $[\widehat{L}_j, V(\widehat{\mathbf{r}})] = 0$, $j = 1, 2, 3$.

¡Pare! ¡Stop! El siguiente problema es totalmente optativo. Pero se tendrá en cuenta en el parcial recuperatorio si Usted lo hace.

Problema 4: Denotando con ϕ_n alguna n-ésima autofunción normalizada del oscilador armónico de masa m y frecuencia angular ω, complete las siguientes afirmaciones:
a) $\langle \phi_n, \widehat{x}\phi_n\rangle = \langle \phi_n, \widehat{p}\phi_n\rangle = 0$ pues ϕ_n es estacionario y por el Teorema de Ehrenfest.....
b) $\langle \phi_n, \widehat{x}\phi_n\rangle = \langle \phi_n, \widehat{p}\phi_n\rangle = 0$ pues para el operador paridad Π se tiene $\Pi\phi_n =$ ..., y $\Pi\widehat{x}\Pi =$ .... y $\Pi\widehat{p}\Pi =$ .... con lo cual...

Solución: a) si para operadores A y B se tiene

$$\frac{d}{dt}\langle \psi_t, A\psi_t\rangle = \langle \psi_t, B\psi_t\rangle$$

para todo ψ donde $\psi_t = e^{-iHt/\hbar}\psi$; y si $H\psi = E\psi$ entonces $\psi_t = e^{-iEt/\hbar}\psi$ y por lo tanto

$$\langle \psi_t, A\psi_t \rangle = \langle e^{-iEt/\hbar}\psi, Ae^{-iEt/\hbar}\psi \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle$$

y entonces $\langle \psi, B\psi \rangle = 0$.
Tomando $A = \widehat{x}$ y $B = \widehat{p}/m$, del Teorema de Ehrenfest obtenemos $\langle \phi_n, \widehat{p}\phi_n \rangle = 0$. Tomando $A = \widehat{p}$ y $B = -V'(\widehat{x}) = -k\widehat{x}$ (¡la fuerza!) obtenemos del mismo teorema que $\langle \phi_n, \widehat{x}\phi_n \rangle = 0$.
b) $\Pi\phi_n = (-)^n\phi_n$ con $\Pi\widehat{x}\Pi = -\widehat{x}$ y con $\Pi\widehat{p}\Pi = -\widehat{p}$ nos da

$$\langle \phi_n, \widehat{x}\phi_n \rangle = \langle \Pi\phi_n, \Pi\widehat{x}\phi_n \rangle = \langle \Pi\phi_n, (\Pi\widehat{x}\Pi)\Pi\phi_n \rangle = (-)^{2n}\langle \phi_n, (-\widehat{x})\phi_n \rangle = -\langle \phi_n, \widehat{x}\phi_n \rangle$$

y analogamente,

$$\langle \phi_n, A\phi_n \rangle = -\langle \phi_n, A\phi_n \rangle$$

para cualquier operador A que satisface $\Pi A\Pi = -A$.