Capítulo 5

Rotaciones espaciales y el momento angular

5.1. Rotaciones en el espacio tridimensional

Considere el espacio euclídeo de tres dimensiones $\mathbb{R}^3$. Los elementos son los vectores $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ con componentes r_j reales. Para obtener el correlato espacial elíjase arbitrariamente un sistema de ejes cartesianos y asóciesele a un punto cualquiera del espacio el vector $\mathbf{r}$ cuyas componentes son las coordenadas cartesianas de ese punto. En este espacio considere las rotaciones alrededor de un eje que pasa por el origen $\mathbf{0}$. Estas rotaciones están especificadas por el eje de rotación, el ángulo de rotación y el "sentido" de esta. La cuestión del "sentido" es en definitiva una convención y la establecemos como sigue: En la recta (que pasa por el origen) que coincide con el eje elíjase un vector $\mathbf{e}$ de largo 1 (hay dos de ellos $\mathbf{e}$ y $-\mathbf{e}$); considere el plano Ω ortogonal a $\mathbf{e}$, este plano divide al espacio en dos mitades; párese en Ω de tal manera que Ud. y $\mathbf{e}$ estén en la misma mitad; dibuje un reloj en el piso; proyecte el vector $\mathbf{r}$ sobre el piso y gire en el sentido anti-horario del espacio por ϕ; a este último vector súmele la proyección de $\mathbf{r}$ sobre el eje y esto es la rotación de $\mathbf{r}$ por el ángulo ϕ alrededor del "eje" $\mathbf{e}$. Llamando $D(\mathbf{e}, \phi)$ a esta transformación, es geométricamente evidente que

$$D(\mathbf{e}, \phi + 2k\pi) = D(\mathbf{e}, \phi) \ , \quad \text{para cualquier entero } k \ ,$$

y también (puede pararse sobre su cabeza) que

$$D(\mathbf{e}, \phi) = D(-\mathbf{e}, -\phi) \ .$$

Para obtener una expresión explícita para la rotación $D(\mathbf{e}, \phi)$ en base al procedimiento descripto, introducimos la siguiente definición: Si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son vectores arbitrarios,

$$|\mathbf{f}\rangle\langle\mathbf{g}|\ \mathbf{r} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{r})\ \mathbf{g}$$

donde $\cdot$ denota el producto escalar, i.e.,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ .$$

Si $\mathbf{a}$ es de largo 1, i.e., $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$, entonces

$$|\mathbf{a}\rangle\langle\mathbf{a}|$$

es precisamente la proyección ortogonal sobre la recta que contiene a $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{a}$. Entonces –siguiendo el procedimiento descripto anteriormente– la rotación $D(\mathbf{e}, \phi)$ se obtiene asi:

1. Proyecte sobre el plano Ω: $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' \equiv \mathbf{r} - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|\ \mathbf{r} = (I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)\mathbf{r}$; aquí I denota la transformación idéntica $I\mathbf{r} = \mathbf{r}$.

2. Rote la proyección obtenida, i.e., $\mathbf{r}'$, por el ángulo ϕ en el sentido anti-horario. Para ello elija arbitrariamente vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ en Ω ambos de largo 1 de tal modo que $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ sean ortogonales y los tres vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}$ formen un sistema dextrógiro, en otras palabras $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}$ y permutaciones cíclicas. Entonces, la rotación en Ω produce:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \cos(\phi)\mathbf{e}_1 + \sin(\phi)\mathbf{e}_2\ , \quad \mathbf{e}_2 \mapsto -\sin(\phi)\mathbf{e}_1 + \cos(\phi)\mathbf{e}_2\ ,$$

como es geométricamente evidente. Luego, ya que

$$\mathbf{r}' = (|\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_1| + |\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_2|)\mathbf{r} = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_2\ ,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \mapsto \mathbf{r}'' &\equiv (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r}) \{\cos(\phi)\mathbf{e}_1 + \sin(\phi)\mathbf{e}_2\} + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r}) \{-\sin(\phi)\mathbf{e}_1 + \cos(\phi)\mathbf{e}_2\}\ \mathbf{r} \\ &= \cos(\phi) \{|\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_1| + |\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_2|\}\ \mathbf{r} + \sin(\phi) \{|\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_1| - |\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_2|\}\ \mathbf{r} \\ &= \cos(\phi) \{I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|\}\ \mathbf{r} + \sin(\phi) \{|\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_1| - |\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_2|\}\ \mathbf{r}\ . \end{aligned}$$

3. Sumele a la rotación de $\mathbf{r}'$ en el plano Ω la proyección de $\mathbf{r}$ sobre el eje: $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}'' + |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|\ \mathbf{r}$. Entonces,

$$D(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r} = |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|\ \mathbf{r} + \cos(\phi) \{I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|\}\ \mathbf{r} + \sin(\phi) \{|\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_1| - |\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_2|\}\ \mathbf{r}\ . \tag{5.1}$$

Esta fórmula tiene la desventaja que aparentemente depende de la elección de los dos vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ lo que geométricamente no tiene sentido. Para poner de manifiesto esto, vemos que la transformación

$$A = |\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_1| - |\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_2|$$

depende solamente de $\mathbf{e}$. En efecto,

$$A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\ , \quad A\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\ , \quad A\mathbf{e} = \mathbf{0}\ ;$$

o lo que es lo mismo,

$$A\mathbf{e}_\ell = \mathbf{e} \times \mathbf{e}_\ell\ , \quad \text{para } \ell = 1, 2, 3 \text{ con } \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}\ .$$

Por lo tanto –en virtud de la linealidad de la transformación A–

$$A\mathbf{r} = A(|\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_1| + |\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_2| + |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)\mathbf{r} = A((\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_2 + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e})$$

$$= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{e} \times \mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{e} \times \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{e} \times \mathbf{e}) = \mathbf{e} \times ((\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_2 + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}) = \mathbf{e} \times \mathbf{r}\ .$$

Entonces,

$$D(\mathbf{e}, \phi)\mathbf{r} = |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|\ \mathbf{r} + \cos(\phi) \{I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|\}\ \mathbf{r} + \sin(\phi)(\mathbf{e} \times \mathbf{r})\ ;$$

o bien

$$\boxed{D(\mathbf{e},\phi) = |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}| + \cos(\phi)\,\{I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|\} + \sin(\phi)(\mathbf{e}\times\cdot)}\ . \tag{5.2}$$

Es geométricamente evidente que la aplicación sucesiva de dos rotaciones alrededor del mismo eje es equivalente a una rotación alrededor de ese eje por la suma de los ángulos:

$$\boxed{D(\mathbf{e},\phi_1)\circ D(\mathbf{e},\phi_2) = D(\mathbf{e},\phi_1+\phi_2)}\ . \tag{5.3}$$

Verifiquemos esto con la fórmula (5.2) para lo cual observamos que:

$$(|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)(I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|) = 0\ ,\ \ (|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)(\mathbf{e}\times\cdot) = 0\ ,$$

con lo cual

$$(I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)(\mathbf{e}\times\cdot) = (\mathbf{e}\times\cdot)\ ;$$

que

$$(|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)^2 = (|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)\ ,\ \ (I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)^2 = I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|\ ;$$

y además

$$(\mathbf{e}\times\cdot)^2\mathbf{r} = (\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{r})) = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\mathbf{e} - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\mathbf{r} = -(I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)\mathbf{r}\ ,$$

lo que se desprende de la relación general

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\ . \tag{5.4}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{e},\phi_1)\circ D(\mathbf{e},\phi_2) &= |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}| + \cos(\phi_1)\cos(\phi_2)(I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)(I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|) \\ &\quad + (\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + \cos(\phi_2)\sin(\phi_1))\,(\mathbf{e}\times\cdot) \\ &= |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}| + \cos(\phi_1+\phi_2)(I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|) + \sin(\phi_1+\phi_2))(\mathbf{e}\times\cdot) = D(\mathbf{e},\phi_1+\phi_2)\ . \end{aligned}$$

La relación (5.3) indica que a eje fijo, las rotaciones forman un grupo abeliano. Con (5.3) la regla de la cadena indica que

$$\frac{d}{d\phi}D(\mathbf{e},\phi) = \left(\frac{d}{d\phi}D(\mathbf{e},\phi)\right)_{\phi=0} D(\mathbf{e},\phi)\ ;$$

ya que $D(\mathbf{e},0) = I$, la solución de esta ecuación diferencial es

$$D(\mathbf{e},\phi) = \exp\left\{\phi\left(\frac{d}{d\phi}D(\mathbf{e},\phi)\right)_{\phi=0}\right\}\ .$$

Pero,

$$\frac{d}{d\phi}D(\mathbf{e},\phi) = -\sin(\phi)(I - |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|) + \cos(\phi)(\mathbf{e}\times\cdot)$$

y entonces

$$\left(\frac{d}{d\phi}D(\mathbf{e},\phi)\right)_{\phi=0} = (\mathbf{e}\times\cdot)\ .$$

Por lo tanto,

$$\boxed{D(\mathbf{e},\phi) = \exp(\phi(\mathbf{e}\times\cdot))}\ . \tag{5.5}$$

Esto puede también verificarse directamente. Usando las relaciones anteriores se obtiene

$$(\mathbf{e}\times\cdot)^{2n} = \left((\mathbf{e}\times\cdot)^2\right)^n = (-(I-|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|))^n = (-)^n(I-|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)\ ,\ \ n=1,2,\cdots\ ;$$

y

$$(\mathbf{e}\times\cdot)^{2n+1} = (\mathbf{e}\times\cdot)^{2n}(\mathbf{e}\times\cdot) = (-)^n(I-|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)(\mathbf{e}\times\cdot) = (-)^n(\mathbf{e}\times\cdot)\ ,\ \ n=0,1,2,\cdots\ .$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\exp(\phi(\mathbf{e}\times\cdot)) &= I + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi^{2n}(\mathbf{e}\times\cdot)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi^{2n+1}(\mathbf{e}\times\cdot)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= I + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n\phi^{2n}}{(2n)!}(I-|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi^{2n+1}(-)^n}{(2n+1)!}(\mathbf{e}\times\cdot) \\
&= I + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n\phi^{2n}}{(2n)!}(I-|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|) - (I-|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|)\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi^{2n+1}(-)^n}{(2n+1)!}(\mathbf{e}\times\cdot) \\
&= |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}| + \cos(\phi)(I-|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|) + \sin(\phi)(\mathbf{e}\times\cdot)\ ,
\end{aligned}$$

lo que recupera (5.2).

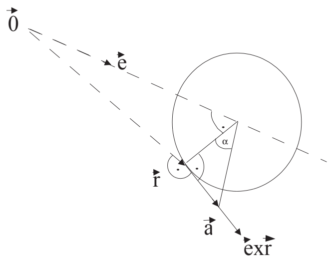

Figura 5.1: El círculo es la órbita de rotación de $\mathbf{r}$. Las lineas continuas están sobre el plano de rotación (Ω); las lineas discontinuas fuera de él. Los ángulos punteados son rectos. El largo del vector $\mathbf{a}$ es $\tan(\alpha)|\mathbf{e}\times\mathbf{r}| \approx \alpha|\mathbf{e}\times\mathbf{r}|$.

La fórmula (5.5) tiene la siguiente interpretación geométrica. Suponga que el ángulo de rotación α es muy pequeño. El vector $\mathbf{e}\times\mathbf{r}$ es ortogonal a $\mathbf{e}$ y a $\mathbf{r}$ y apunta en la dirección de rotación correcta (anti-horaria) luego (vea la figura 6.1)

$$D(\mathbf{e},\alpha)\mathbf{r} \approx \mathbf{r} + \alpha(\mathbf{e}\times\mathbf{r})$$

donde la aproximación mejora cuanto más chico sea α. Para un ángulo de rotación arbitrario ϕ y un número natural n enorme, rotemos sucesivamente por ϕ/n, entonces

$$D(\mathbf{e},\phi/n)\mathbf{r} \approx \mathbf{r} + \frac{\phi}{n}(\mathbf{e}\times\mathbf{r}) = (I - \frac{\phi}{n}(\mathbf{e}\times\cdot))\mathbf{r}\ ,$$

$$D(\mathbf{e},\phi/n)D(\mathbf{e},\phi/n)\mathbf{r} \approx (I - \frac{\phi}{n}(\mathbf{e}\times\cdot))^2\mathbf{r}\ ,\ \cdots\ ,$$

$$D(\mathbf{e},\phi) = D(\mathbf{e},\phi/n)^n\mathbf{r} \approx (I - \frac{\phi}{n}(\mathbf{e}\times\cdot))^n\mathbf{r}\ .$$

La aproximación mejora con n y se espera que sea exacta para $n\to\infty$. En efecto, de la misma manera que se ve que

$$e^z = \lim_{n\to\infty}(1+(z/n))^n\ ,$$

se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}(I-(\phi/n)(\mathbf{e}\times\cdot))^n = e^{\phi(\mathbf{e}\times\cdot)}\ .$$

Si elegimos la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)\ ,\ \ \mathbf{e}_2 = (0,1,0)\ ,\ \ \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\ ,$$

a cada transformación lineal T le corresponde de manera unívoca una matriz $\mathbf{T}$; esta tiene como columna k $(k=1,2,3)$ a las componentes cartesianas de $T\mathbf{e}_k$ en la base elegida. Es una cálculo inmediato que si

$$\mathbf{e} = (x,y,z)\ ,$$

entonces

$$|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}| = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}\ ,\ \ \mathbf{e}\times\cdot = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\ ;$$

con lo cual la matriz $\mathbf{D}(\mathbf{e},\phi)$ asociada con $D(\mathbf{e},\phi)$ es

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)+(1-\cos(\phi))x^2 & (1-\cos(\phi))xy-\sin(\phi)z & (1-\cos(\phi))xz+\sin(\phi)y \\ (1-\cos(\phi))xy+z\sin(\phi) & \cos(\phi)+(1-\cos(\phi))y^2 & (1-\cos(\phi))yz-\sin(\phi)x \\ (1-\cos(\phi))xz-\sin(\phi)y & (1-\cos(\phi))yz+\sin(\phi)x & \cos(\phi)+(1-\cos(\phi))z^2 \end{pmatrix}\ .$$

Un cálculo largo nos da el resultado

$$det(\mathbf{D}(\mathbf{e},\phi)) = 1\ ;$$

también, ya que $D(\mathbf{e},-\phi) = D(\mathbf{e},\phi)^{-1}$ y por inspección la matriz transpuesta de $\mathbf{D}(\mathbf{e},\phi)$ es la matriz $\mathbf{D}(\mathbf{e},-\phi)$, concluimos que: $\mathbf{D}(\mathbf{e},\phi)$ *es una matriz ortogonal.* Estas afirmaciones se pueden obtener directamente demostrando que $D(\mathbf{e},\phi)$ es una transformación ortogonal que preserva la orientación:

$$(D(\mathbf{e},\phi)\mathbf{r})\cdot(D(\mathbf{e},\phi)\mathbf{r}') = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\ ,\ \ (D(\mathbf{e},\phi)\mathbf{r})\times(D(\mathbf{e},\phi)\mathbf{w}) = D(\mathbf{e},\phi)(\mathbf{r}\times\mathbf{w})\ .$$

Podemos introducir las tres rotaciones alrededor de los tres ejes que coinciden con los tres vectores de la base. Poniendo

$$G_j = (\mathbf{e}_j\times\cdot)$$

tenemos

$$(\mathbf{e}\times\cdot) = ((x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)\times\cdot) = xG_1 + yG_2 + yG_3 = \mathbf{e}\cdot\mathbf{G}$$

donde juntamos los tres operadores G_j para formar el operador-vector $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$. Entonces, podemos reescribir (5.5)

$$\boxed{D(\mathbf{e},\phi) = \exp(\phi\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{G})}\ . \tag{5.6}$$

Además, con (5.4)

$$[G_1, G_2] = \mathbf{e}_1\times(\mathbf{e}_2\times\cdot) - \mathbf{e}_2\times(\mathbf{e}_1\times\cdot) = |\mathbf{e}_2\rangle\langle\mathbf{e}_1| - |\mathbf{e}_1\rangle\langle\mathbf{e}_2| = \mathbf{e}_3\times\cdot\ ,$$

y permutaciones cíclicas de los índices; con lo cual

$$\boxed{[G_1, G_2] = G_3\ ,\quad [G_3, G_1] = G_2\ ,\quad [G_2, G_3] = G_1}\ . \tag{5.7}$$

5.1.1. El grupo de rotaciones

Muy frecuentemente se lee que “es geométricamente evidente que la aplicación sucesiva de dos rotaciones es nuevamente una rotación”; a mí no me resulta para nada claro salvo en casos muy particulares. Esta afirmación dice que dadas rotaciones $(\mathbf{e},\alpha)$ y $(\mathbf{f},\beta)$ se debe tener

$$D(\mathbf{e},\alpha)D(\mathbf{f},\beta) = D(\mathbf{g},\gamma)$$

para algún vector $\mathbf{g}$ de largo 1 y algún real γ. ¿Cómo se construyen g y γ a partir de $(\mathbf{e},\alpha)$ y $(\mathbf{f},\beta)$? Para ver la existencia hay varios caminos; creo que todos conducen a demostrar que el grupo geométrico de las rotaciones es isomorfo a $SO(3)$, el grupo de matrices 3×3 con elementos reales, que son ortogonales y de determinante 1. Como el producto de dos matrices ortogonales de determinante 1 tiene también estas dos propiedades y como toda matriz ortogonal es invertible siendo su transpuesta igual a su inversa, está claro que $SO(3)$ es un grupo. Ya que observamos que a toda rotación le corresponde una matriz ortogonal de determinante 1, la verificación de la existencia del isomorfismo se liquida con el siguiente

Lema Si $\mathbf{T}$ es una matriz ortogonal de determinante igual a 1 entonces hay una matriz ortogonal $\mathbf{U}$ y un real ϕ tal que

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{T}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}\ .$$

Demostración: Sea $f(t) = det(\mathbf{T} - t\mathbf{I})$; se tiene $f(0) = 1$ y, ya que f es un polinomio de grado 3 de la forma $f(t) = -t^3 +$ polinomio de grado 2, se tiene $\lim_{t\to\infty} f(t) = -\infty$. Por lo tanto existe $t_o > 0$ tal que $f(t_o) = 0$. Entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$(\mathbf{T} - t_o\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

admite solución no trivial $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, i.e., $\mathbf{T}\mathbf{x} = t_o\mathbf{x}$. Podemos suponer que $\mathbf{x}$ es de largo 1. Como, por ortogonalidad, $\mathbf{T}\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}$ tienen el mismo largo, tenemos $|t_o| = 1$ y deducimos que

t_o –que es positivo– debe ser 1. Entonces $\mathbf{T}^\dagger\mathbf{x} = \mathbf{T}^\dagger\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ porque $\mathbf{T}^\dagger\mathbf{T} = \mathbf{I}$. Si $\mathbf{y}$ es ortogonal a $\mathbf{x}$ se tiene

$$\mathbf{x}^\dagger\mathbf{T}\mathbf{y} = \left(\mathbf{T}^\dagger\mathbf{x}\right)^\dagger \mathbf{y} = \mathbf{x}^\dagger\mathbf{y} = 0 \; .$$

O sea que $\mathbf{T}$ transforma el subespacio de los vectores ortogonales a $\mathbf{x}$ en sí mismo. Hay entonces una matriz ortogonal $\mathbf{U}$ (un cambio de base ortogonal)[1] tal que

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{T}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \; ,$$

donde los números reales a, b, c, d deben satisfacer

$$ad - bc = 1 \text{ (la determinante es 1)},$$

$$a^2 + b^2 = 1 \quad c^2 + d^2 = 1 \; , \quad ac + bd = 0 \text{ (ortogonalidad de la matriz } 2 \times 2) \; .$$

Poniendo $a = \cos(\alpha)$, $b = -\sin(\alpha)$, $c = \sin(\beta)$ y $d = \cos(\beta)$, un poco de álgebra conduce a que $\beta = \alpha + 2n\pi$ con n entero, y por ende la matriz tiene la forma buscada.

Ahora,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada con la rotación alrededor del primer vector de la base por el ángulo ϕ. Pero $\mathbf{U}$ es un cambio ortogonal de base, o sea que también $\mathbf{T}$ es la matriz de una rotación.

5.2. Representaciones unitarias

En general una representación de un grupo $\mathcal{G}$ es una aplicación $g \mapsto R(g)$ del grupo en los operadores lineales invertibles de algún espacio vectorial (complejo o real) que asigna al producto de dos elementos del grupo el producto (aplicación sucesiva) de los operadores correspondientes. O sea, $R(g)$ es un operador lineal invertible de un espacio vectorial y $R(g_1g_2) = R(g_1)R(g_2)$.

En la mecánica cuántica interesan sobre todo las representaciones unitarias, que son aquellas donde el espacio vectorial es un espacio de Hilbert, y $R(g)$ es unitario.

Una representación unitaria del grupo $SO(3)$ es entonces asignarle a cada $D(\mathbf{e}, \phi)$ un operador unitario $U_{(\mathbf{e},\phi)}$

$$D(\mathbf{e}, \phi) \to U_{D(\mathbf{e},\phi)}$$

de tal manera que

$$U_{D(\mathbf{e},\phi)} U_{D(\mathbf{f},\psi)} = U_{D(\mathbf{e},\phi) D(\mathbf{f},\psi)} \; .$$

[1] Para construir $\mathbf{U}$ basta elegir dos vectores $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ ambos de largo 1 que sean ortogonales entre si y ambos ortogonales a $\mathbf{x}$, i.e., $\mathbf{x} \times \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3$. Entonces $\mathbf{U}$ es la matriz que tiene como primera columna a $\mathbf{x}$, como segunda columna a $\mathbf{x}_2$ y como tercera columna a $\mathbf{x}_3$.

5.3. Representación unitaria de las rotaciones y el momento angular

En 2.4.2 le asociamos a cada transformación lineal invertible T de $\mathbb{R}^n$ un operador unitario U_T de manera que $U_T U_S = U_{TS}$; aplicamos esto al caso de las rotaciones. A cada rotación $D(\mathbf{e}, \phi)$ le asociamos el operador que actúa en $L^2(\mathbb{R}^3)$ por

$$\boxed{\left(U_{D(\mathbf{e},\phi)}\Psi\right)(\mathbf{r}) = \Psi(D(\mathbf{e}, -\phi)\mathbf{r})}\ ; \tag{5.8}$$

observe que $U_{D(\mathbf{e},\phi)}$ se define con la transformación inversa a $D(\mathbf{e}, \phi)$. Los resultados de 2.4.2 se particularizan a:

$$\boxed{U_{D(\mathbf{e},\phi)}U_{D(\mathbf{f},\psi)} = U_{D(\mathbf{e},\phi)D(\mathbf{f},\psi)}}\ ; \tag{5.9}$$

$$\boxed{U^*_{D(\mathbf{e},\phi)} = U_{D(\mathbf{e},-\phi)} = U^{-1}_{D(\mathbf{e},\phi)}}\ ; \tag{5.10}$$

i.e., $D(\mathbf{e}, \phi) \mapsto U_{D(\mathbf{e},\phi)}$ es una representación unitaria.

En virtud de que $\phi \mapsto U_{D(\mathbf{e},\phi)}$ es un grupo monoparamétrico de operadores unitarios, se tiene

$$U_{D(\mathbf{e},\phi)} = \exp\left\{\phi\ \left(\frac{d}{d\phi}U_{D(\mathbf{e},\phi)}\right)_{\phi=0}\right\}\ .$$

Calculamos la derivada usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{d\phi}(U_{D(\mathbf{e},\phi)}\Psi)(\mathbf{r})\right)_{\phi=0} \\
&= \left\{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r_j}\right)(D(\mathbf{e}, -\phi)\mathbf{r})\ \frac{d}{d\phi}\left(D(\mathbf{e}, -\phi)\mathbf{r}\right)_j\right\}_{\phi=0} \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r_j}\right)(\mathbf{r})\ (-)(\mathbf{e}\times\mathbf{r})_j = -(\mathbf{e}\times\mathbf{r})\cdot(\nabla\Psi)(\mathbf{r}) \\
&= -\mathbf{e}\cdot(\mathbf{r}\times(\nabla\Psi)(\mathbf{r})) = -\mathbf{e}\cdot\left((\mathbf{r}\times\nabla)\Psi\right)(\mathbf{r})\ ,
\end{aligned}$$

y la relación general $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$ que sigue siendo válida en nuestro caso pues el gradiente no actúa sobre el vector $\mathbf{r}$ en nuestra expresión. Concluimos que

$$\left(\frac{d}{d\phi}U_{D(\mathbf{e},\phi)}\right)_{\phi=0} = -\mathbf{e}\cdot(\widehat{\mathbf{r}}\times\widehat{\nabla}) = \frac{-i}{\hbar}\mathbf{e}\cdot(\widehat{\mathbf{r}}\times\widehat{\mathbf{p}}) = \frac{-i}{\hbar}\mathbf{e}\cdot\widehat{\mathbf{L}}\ .$$

Observe que el operador momento angular $\widehat{\mathbf{L}}$ se obtiene cuantizando el momento angular clásico y que $\widehat{\mathbf{r}}\times\widehat{\mathbf{p}} = -\widehat{\mathbf{p}}\times\widehat{\mathbf{r}}$. Tenemos entonces el hermoso resultado

$$\boxed{U_{D(\mathbf{e},\phi)} = \exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\ \phi\ \mathbf{e}\cdot\widehat{\mathbf{L}}\right)}\ ; \tag{5.11}$$

o sea que el operador de momento angular es el generador de la implementación unitaria de las rotaciones.

Las fórmulas de transformación para los operadores de posición y momento fueron obtenidas en 2.4.2 y son en nuestro caso:

$$\boxed{U^*_{D(\mathbf{e},\phi)}\, \widehat{\mathbf{r}}\, U_{D(\mathbf{e},\phi)} = D(\mathbf{e},\phi)\widehat{\mathbf{r}}}\ ; \tag{5.12}$$

$$\boxed{U^*_{D(\mathbf{e},\phi)}\, \widehat{\mathbf{p}}\, U_{D(\mathbf{e},\phi)} = D(\mathbf{e},\phi)\widehat{\mathbf{p}}}\ . \tag{5.13}$$

Los operadores transforman bajo rotaciones como las magnitudes físicas clásicas, o sea como vectores. También,

$$\begin{aligned} U^*_{D(\mathbf{e},\phi)}\, (\,\widehat{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{p}}\,)\, U_{D(\mathbf{e},\phi)} &= \big(U^*_{D(\mathbf{e},\phi)}\, \widehat{\mathbf{r}}\, U_{D(\mathbf{e},\phi)}\big) \times \big(U^*_{D(\mathbf{e},\phi)}\, \widehat{\mathbf{p}}\, U_{D(\mathbf{e},\phi)}\big) \\ &= (D(\mathbf{e},\phi)\, \widehat{\mathbf{r}}) \times (D(\mathbf{e},\phi)\, \widehat{\mathbf{p}}) = D(\mathbf{e},\phi)(\,\widehat{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{p}}) \ ; \end{aligned}$$

o sea

$$\boxed{U^*_{D(\mathbf{e},\phi)}\, \widehat{\mathbf{L}}\, U_{D(\mathbf{e},\phi)} = D(\mathbf{e},\phi)\, \widehat{\mathbf{L}}}\ . \tag{5.14}$$

Podemos obtener las relaciones de conmutación para $\widehat{\mathbf{L}}$ de la útlima fórmula derivando con respecto a ϕ en $\phi = 0$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \widehat{\mathbf{L}} &= \left(\frac{d}{d\phi} U^*_{D(\mathbf{e}_1,\phi)}\right)_{\phi=0} \widehat{\mathbf{L}} + \widehat{\mathbf{L}} \left(\frac{d}{d\phi} U_{D(\mathbf{e}_1,\phi)}\right)_{\phi=0} \\ &= \frac{i}{\hbar}(\mathbf{e}_1 \cdot \widehat{\mathbf{L}})\widehat{\mathbf{L}} + \widehat{\mathbf{L}}\frac{-i}{\hbar}(\mathbf{e}_1 \cdot \widehat{\mathbf{L}}) = \frac{i}{\hbar}\left(\widehat{L_1}\widehat{\mathbf{L}} - \widehat{\mathbf{L}}\widehat{L_1}\right) = \frac{i}{\hbar}[\widehat{L_1}, \widehat{\mathbf{L}}] \ , \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{e}_1 \times \widehat{\mathbf{L}} = (\widehat{0}, -\widehat{L_3}, \widehat{L_2}) \ ;$$

o sea

$$[\widehat{L_1}, \widehat{L_2}] = i\hbar\widehat{L_3} \ , \quad [\widehat{L_1}, \widehat{L_3}] = -i\hbar\widehat{L_2} \ .$$

De la misma manera se obtiene también

$$[\widehat{L_2}, \widehat{L_3}] = i\hbar\widehat{L_1} \ .$$

Luego,

$$\boxed{[\widehat{L_j}, \widehat{L_k}] = \ i\hbar \textstyle\sum_{\ell=1}^3 \epsilon_{j,k,\ell}\widehat{L_\ell} \ \ , \ \ j,k \in \{1,2,3\}}\ , \tag{5.15}$$

donde $\epsilon_{j,k,\ell}$ es el tensor totalmente antisimétrico en tres indices:

$$\epsilon_{j,k,\ell} = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si dos de los índices son iguales} \\ 1 & , \quad \text{si } (j,k,\ell) \text{ es permutación par de } (1,2,3) \\ -1 & , \quad \text{si } (j,k,\ell) \text{ es permutación impar de } (1,2,3) \end{cases} \quad .$$

Por supuesto, las relaciones de conmutación pueden obtenerse también directamente de $\widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{p}}$ y de la relación de conmutación $[\widehat{r_j}, \widehat{p_k}] = i\hbar\delta_{j,k}$. Verifiquemos que

$$\mathbf{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

conmuta con cualquiera de las componentes de $\mathbf{L}$;

$$\begin{aligned}
[\mathbf{L}^2, L_j] = \sum_{k=1}^{3}[L_k^2, L_j] &= \sum_{k=1}^{3} L_k[L_k, L_j] + [L_k, L_j]L_k = \sum_{k,\ell=1}^{3} \epsilon_{k,j,\ell}(L_k L_\ell + L_\ell L_k) \\
&= \sum_{k,\ell=1}^{3} \epsilon_{k,j,\ell} L_k L_\ell + \sum_{k,\ell=1}^{3} \epsilon_{k,j,\ell} L_\ell L_k = \sum_{k,\ell=1}^{3} \epsilon_{k,j,\ell} L_k L_\ell + \sum_{k,\ell=1}^{3} \epsilon_{\ell,j,k} L_k L_\ell \\
&= \sum_{k,\ell=1}^{3} (\epsilon_{k,j,\ell} + \epsilon_{\ell,j,k}) L_k L_\ell = 0 \ ,
\end{aligned}$$

ya que $\epsilon_{j,k,\ell} = -\epsilon_{\ell,k,j}$.

5.4. Sobre el espectro de un trio que satisface (5.15)

Considere un trio de operadores autoadjuntos $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$, con un dominio de definición común en un espacio de Hilbert complejo tal que

$$[J_j, J_k] = i \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell} J_\ell \ .$$

Suponemos que existe un subespacio denso del dominio de definición y que este subespacio es invariante ante la acción de cualquier componente; esto permite darle sentido a los conmutadores y a los cálculos algebraicos que siguen.

Como visto en el caso del momento angular, obtenemos inmediatamente que

$$[\mathbf{J}^2, J_j] = 0 \ , \quad j = 1, 2, 3 \ ; \quad \mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \ .$$

Elegimos la componente J_3 y definimos

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 \ .$$

Entonces,

1. $(J_\pm)^* = J_\mp$;
2. $[J_+, J_-] = -i[J_1, J_2] + i[J_2, J_1] = -2i[J_1, J_2] = 2J_3$;
3. $[J_3, J_\pm] = [J_3, J_1] \pm i[J_3, J_2] = iJ_2 \pm i(-iJ_1) = \pm J_\pm$;
4. $[\mathbf{J}^2, J_\pm] = [\mathbf{J}^2, J_1] \pm i[\mathbf{J}^2, J_2] = 0$;

5. $J_\pm J_\mp = (J_1 \pm iJ_2)(J_1 \mp iJ_2) = J_1^2 + J_2^2 \pm iJ_2J_1 \mp iJ_1J_2 = J_1^2 + J_2^2 \mp i[J_1, J_2] = J_1^2 + J_2^2 \pm J_3 = \mathbf{J}^2 - J_3^2 \pm J_3$

Estas propiedades, nos permiten demostrar las siguientes propiedades cruciales:

(A) *Si ψ es autovector de J_3 al autovalor λ entonces*

$$J_3(J_\pm\psi) = (\lambda \pm 1)(J_\pm\psi)$$

y

$$\|J_\pm\psi\|^2 = \langle\psi, \mathbf{J}^2\psi\rangle - \lambda(\lambda \pm 1)\|\psi\|^2 \ . \tag{5.16}$$

Luego, si $J_\pm\psi \neq 0$ entonces es autovector de J_3 al autovalor $\lambda \pm 1$.

(B) *Si ψ es autovector de $\mathbf{J}^2$ entonces si $J_\pm\psi$ no es nulo es autovector de $\mathbf{J}^2$ al mismo autovalor.*

En efecto,

$$J_3(J_\pm\psi) = ([J_3, J_\pm] + J_\pm J_3)\psi \stackrel{3.}{=} (\pm J_\pm + J_\pm J_3)\psi = \pm(J_\pm\psi) + \lambda(J_\pm\psi) = (\lambda \pm 1)(J_\pm\psi) \ ;$$

$$\begin{aligned}\|J_\pm\psi\|^2 = \langle J_\pm\psi, J_\pm\psi\rangle \stackrel{1.}{=} \langle\psi, J_\mp J_\pm\psi\rangle \stackrel{5}{=} \langle\psi, (\mathbf{J}^2 - J_3^2 \mp J_3)\psi\rangle \\ = \langle\psi, \mathbf{J}^2\psi\rangle - \lambda^2\|\psi\|^2 \mp \lambda\|\psi\|^2 \ ;\end{aligned}$$

y si $\mathbf{J}^2\psi = \alpha\psi$ entonces

$$\mathbf{J}^2 J_\pm\psi \stackrel{4.}{=} J_\pm\mathbf{J}^2\psi = \alpha J_\pm\psi \ .$$

Supóngase entonces que $\mathbf{J}^2$ y J_3 admiten un autovector común ψ_o, o sea

$$\mathbf{J}^2\psi_o = \mu\psi_o \ , \quad J_3\psi = \lambda\psi_o \ , \quad \psi_o \neq 0 \ .$$

Tenemos entonces

$$\mu\|\psi_o\|^2 = \langle\psi_o, \mathbf{J}^2\psi_o\rangle = \sum_{j=1}^{3}\langle\psi_o, J_j^2\psi_o\rangle = \sum_{j=1}^{3}\|J_j\psi_o\|^2 \geq 0$$

y esto indica que $\mu \geq 0$ con igualdad (i.e., $\mu = 0$) si y solo si $J_j\psi_o = 0$ para $j = 1, 2, 3.$. Sea $\mathcal{E}_\mu$ el autoespacio de $\mathbf{J}^2$ al autovalor μ. Por (B) este autoespacio es invariante para la acción de $J_\pm$. Aplicando sucesivamente J_+ a ψ_o obtenemos (use (A)) los autovalores $\lambda+1, \lambda+2, \cdots$ de J_3 y, por (5.16),

$$\|J_+^{n+1}\psi_o\|^2 = \{\mu - (\lambda + n)(\lambda + n + 1)\}\,\|J_+^n\psi_o\|^2 \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \ . \tag{5.17}$$

Si $J_+^k\psi_o \neq 0$ para todo $k = 1, 2, 3, \cdots$, entonces obtenemos una contradicción con (5.17) ya que cualquiera sea el valor de $\mu \geq 0$ y de λ siempre hay un número natural n tal que en (5.17) $\mu - (\lambda + n)(\lambda + n + 1) < 0$ con lo cual $\|J_+^{n+1}\psi_o\|^2 < 0$. Por lo tanto, existe algún número natural n_o tal que $J_+^{n_o}\psi_o \neq 0$ pero $J_+^{n_o+1}\psi_o = 0$ o sea

$$\mu = (\lambda + n_o)(\lambda + n_o + 1) \ . \tag{5.18}$$

Aplicando sucesivamente J_- a ψ_o obtenemos por (A) los autovalores $\lambda-1, \lambda-2, \cdots$ de J_3 y por (5.16)

$$\|J_-^{m+1}\psi_o\|^2 = \{\mu - (\lambda - m)(\lambda - m - 1)\} \, \|J_-^m \psi_o\|^2 \ . \tag{5.19}$$

Nuevamente, $J_-^m \psi_o$ tiene que ser 0 para algún m pues sino se elige m tal que $\mu-(m-\lambda)(m+1-\lambda) < 0$ para obtener la contradicción. Por lo tanto existe un número natural m_o tal que $J_-^{m_o}\psi \neq 0$ y $J_-^{m_o+1}\psi_o = 0$, con lo cual

$$\mu = (\lambda - m_o)(\lambda - m_o - 1) \ . \tag{5.20}$$

Pero entonces de (5.18) y (5.20),

$$0 = (\lambda+n_o)(\lambda+n_o+1) - (\lambda-m_o)(\lambda-m_o-1) = 2\lambda(n_o+m_o+1) + n_o^2 - m_o^2 + n_o - m_o$$
$$= 2\lambda(n_o+m_o+1) + (n_o+m_o+1)(n_o-m_o) = (2\lambda+n_o-m_o)(n_o+m_o+1)$$

y ya que $n_o+m_o+1>0$ deducimos que

$$\lambda = (m_o - n_o)/2 \ , \ \ \mu = \frac{m_o+n_o}{2}\left(\frac{m_o+n_o}{2}+1\right) \ .$$

O sea que $\mu = j(j+1)$ donde j es un número natural dividido por 2, i.e.,

$$\mu = j(j+1) \ , \ \ j \in \{0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \cdots\} \ .$$

Además, los $n_o+m_o+1 = 2j+1$ autovalores $\lambda-m_o, \lambda-m_o+1, \cdots, \lambda, \lambda+1, \cdots, \lambda+n_o$ de J_3 son exactamente todos los números semi-enteros entre $-j$ y j. Las correspondientes autofunciones $J_\pm^n\psi_o$ están todas en el autoespacio $\mathcal{E}_\mu$. Lo expuesto demuestra que hemos encontrado todos los autovalores de J_3 en $\mathcal{E}_\mu$. Veamos que estos son de igual multiplicidad. Si ψ_1 es ortogonal a ψ_o, tenemos

$$\langle J_\pm\psi_1, J_\pm\psi_o\rangle = \langle\psi_1, (\mathbf{J}^2 - J_3^2 \mp J_3)\psi_o\rangle$$
$$= \langle\psi_1, (\mu - \lambda^2 \mp \lambda)\psi_o\rangle = (\mu-\lambda^2\mp\lambda)\langle\psi_1,\psi_o\rangle = 0 \ .$$

Como la multiplicidad de λ es la cantidad de autovectores asociados que sean dos-a-dos ortogonales, deducimos que todos los autovalores encontrados son de igual multiplicidad ya que la aplicación sucesiva $J_\pm$ nos permite ir de una autoespacio de J_3 en $\mathcal{E}_\mu$ a otro, y $J_\pm$ preserva la ortogonalidad de autovectores de J_3.

Volviendo a la suposición inicial, o sea la existencia de un autovector común a $\mathbf{J}^2$ y a J_3, no es mucho lo que se puede decir en general sin apelar a otras teorías. En efecto, si $\mathbf{J}^2$ tiene un autovalor μ entonces el autoespacio asociado, $\mathcal{E}_\mu$ tiene dimensión 1 a lo menos, y es invariante ante J_3. Si este autoespacio resulta ser de dimensión finita, entonces J_3 tiene autovectores en este subespacio y resulta $\mu = j(j+1)$ con j semientero, la dimensión de $\mathcal{E}_\mu$ es $2j+1$ a lo menos y los autovalores de J_3 con autovectores en $\mathcal{E}_\mu$ son los números $2j+1$ números $-j, -j+1, \cdots, j-1, j$ todos con igual multiplicidad.

Decimos que el vector operador $\mathbf{J}$ es irreducible si cualquier operador que conmuta con cada una de las tres componentes de $\mathbf{J}$ debe ser un múltiplo de la identidad. En tal caso

$\mathbf{J}^2$ es un múltiplo de la identidad, y por ende $\mathbf{J}^2 = j(j+1)I$ con algún semientero j y $\mathcal{E}_\mu = \mathbb{C}^{2j+1}$ y los $2j+1$ autovalores de J_3 son de multiplicidad 1.

Se puede ver que si un vector operador $\mathbf{J}$ cumple con la relaciones de conmutación, entonces el operador unitario

$$U_{\mathbf{e},\alpha} = \exp(-i\alpha\mathbf{e}\cdot\mathbf{J}) \ , \quad \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 \text{ de largo 1 y } \alpha \in \mathbb{R}$$

realiza una representación unitaria del grupo $SU(2)$ (que explicaremos a continuación). El teorema fundamental de la teoría de representaciones unitarias de grupos compactos debido a Peter y Weyl, dice que cualquier representación unitaria puede descomponerse en una suma directa de representaciones unitarias irreducibles. Aquí, la representación se dice irreducible si $[U_{\mathbf{e},\alpha}, A] = 0$ con un operador A para todo vector real unitario $\mathbf{e}$ y todo α real implica que A es múltiplo de la identidad. Esto, resulta equivalente a que el generador $\mathbf{J}$ asociado, sea irreducible. En resumen, el Teorema de Peter-Weyl indica que para cualquier operador $\mathbf{J}$ con las relaciones de conmutación del momento angular, se tiene que el espectro de $\mathbf{J}^2$ es puramente discreto e igual a algún subconjunto de $\{j(j+1) : j \in \{0, 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots\}\}$; que para cada valor de j que aparece con alguna multiplicidad m_j, se tienen $m_j(2j+1)$ autovectores dos-a-dos ortogonales de J_3 asociados con los autovalores $\{-j+m : m = 0, 1, 2, \cdots, 2j\}$ que son de igual multiplicidad m_j. Todos estos valores posibles conforman el espectro de J_3 que es también puramente discreto.

5.5. L en coordenadas esféricas.

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) con $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$, tenemos

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = r(\cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\theta))$$

y cuando $x = y = 0$ el ángulo azimutal no está definido. Salvo en este caso correspondencia entre $\mathbf{r}$ y (r, θ, ϕ) es unívoca. Si consideramos la función f de $\mathbb{R}^3$ a valores complejos, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \ f(r, \theta, \phi) r^2 \sin(\theta) \ .$$

Calculando lo necesario se obtiene

$$L_1 = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\hbar\left(\sin(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos(\phi)\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \ ,$$

$$L_2 = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(\cos(\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin(\phi)\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \ ,$$

$$L_3 = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \ ,$$

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \ .$$

Cada componente de $\mathbf{L}$ actúa solamente sobre las variables angulares. La elección de la tercera componente z como eje polar produce la forma simple de L_3; pero está claro que eligiendo coordenadas polares con eje polar en las otras dos direcciones se obtiene la misma forma para L_1 y L_2. Las componentes de $\mathbf{L}$ unitariamente equivalentes. En efecto, con $\mathbf{e} = 3^{-1/2}(1,1,1)$ se tiene $D(\mathbf{e}, 2\pi/3)\mathbf{r} = (z, x, y)$ y entonces

$$U^*_{D(\mathbf{e},2\pi/3)}\mathbf{L}U_{D(\mathbf{e},2\pi/3)} = (L_3, L_1, L_2) \; ;$$

luego los dos miembros de los tres pares (L_1, L_3), (L_2, L_1) y (L_3, L_2), son unitariamente equivalentes y por ende todo L_j es unitariamente equivalente a todo L_k.

Recordando la expresión para el Laplaciano en coordenadas esféricas

$$\boxed{-\hbar^{-2}\widehat{\mathbf{p}}^2 = \Delta = r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2(\sin(\theta))^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}} \; , \tag{5.21}$$

tenemos

$$\boxed{\widehat{\mathbf{p}}^2 = r^{-2}\widehat{\mathbf{L}}^2 - r^{-2}\hbar^2\left(\left(r\tfrac{\partial}{\partial r}\right)^2 + r\tfrac{\partial}{\partial r}\right)} \; . \tag{5.22}$$

Esto también se desprende de la relación

$$\widehat{\mathbf{L}}^2 = \widehat{r}^2\widehat{p}^2 - (\widehat{r}\cdot\widehat{p})^2 + i\hbar\widehat{r}\cdot\widehat{p}$$

–que se demuestra calculando $(\widehat{r}\times\widehat{p})^2$– y la fórmula

$$\widehat{r}\cdot\widehat{p} = -i\hbar r\frac{\partial}{\partial r} \; .$$

Al discutir el operador diferencial en un intervalo finito, vimos que

$$-i\frac{d}{d\phi}$$

definido para funciones de módulo cuadrado integrable sobre $[0, 2\pi]$ con condición de contorno $f(0) = f(2\pi)$ y derivada de módulo cuadrado integrable, es autoadjunto. Luego, L_3 resulta autoadjunto si se define para funciones f de módulo cuadrado integrable sobre $\mathbb{R}^3$ tales que $f(r, \theta, \phi+2\pi) = f(r, \theta, \phi)$ y que la derivada parcial con respecto a ϕ sea de módulo cuadrado integrable. Ahora, $L_3 f = \hbar\lambda f$ es equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial\phi} = i\lambda f$$

o sea

$$f(r, \theta, \phi) = e^{i\lambda\phi}g(r, \theta) \; ,$$

y la periodicidad en ϕ impone $\lambda = m$ donde m es un entero arbitrario. Como las funciones $\{(2\pi)^{-1/2}e^{im\phi} : \; m \text{ entero }\}$ forman un sistema ortonormal completo de $L^2([0, 2\pi])$ hemos encontrado el espectro de L_3 (y por ende de cualquier componente de $\mathbf{L}$):

$$\sigma(L_3) = \{\hbar m : \; m \text{ entero}\} \; , \quad \text{y todo autovalor es de multiplicidad infinita.}$$

La multiplicidad infinita resulta del hecho que $g(r,\theta)$ es arbitraria siempre que resulte de módulo cuadrado integrable con respecto a $r^2\sin(\theta)drd\theta$. En este sentido es "doblemente infinita".

5.6. El espectro de $\mathbf{L}^2$ y de cualquier componente de L. Armónicos esféricos.

De los apartados 4. y 5. sabemos que los autovalores de cualquier componente de $\mathbf{L}$ son los números $\hbar m$ con m entero y por ende los posibles autovalores de $\mathbf{L}^2$ son de la forma $E_\ell = \hbar^2\ell(\ell+1)$ con ℓ un número natural. Veremos que todos los naturales ℓ aparecen y que los autovalores E_ℓ son de multiplicidad infinita. Esto último surge del hecho de que $\mathbf{L}^2$ actuando sobre $L^2(\mathbb{R}^3)$ no involucra a la coordenada radial. Si en cambio, consideramos la restricción $[\mathbf{L}^2]_S$ del operador $\mathbf{L}^2$ a las funciones de módulo cuadrado integrable sobre la esfera $L^2(S)$, y la restricción $[L_j]_S$ de cualquier componente al mismo espacio, se tiene una situación más manejable:

$$\sigma([\mathbf{L}^2]_S) = \{E_\ell = \hbar^2\ell(\ell+1) :\ \ell = 0,1,2,3,\cdots\}\ , \quad \text{y la multiplicidad de } E_\ell \text{ es } 2\ell+1\ ;$$

$$\sigma([L_j]_S) = \{\hbar m :\ m = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}\ ,$$

y el autovalor $\hbar m$ es de multiplicidad infinita pero aparece exactamente una vez en cada uno de los autoespacios $\mathcal{E}_\ell$ asociados con el autovalor E_ℓ de $\mathbf{L}^2$ para $\ell \geq |m|$.

Este resultado se puede obtener algebraicamente construyendo operadores $X_\pm$ que aumentan/disminuyen los autovalores de $\mathbf{L}^2$ en una unidad de $\hbar^2$[2]. Aquí seguimos la otra variante, o sea, la discusión de la ecuaciones diferenciales y sus autovalores. Con los resultados ya obtenidos buscamos funciones $\psi_{\ell,m}$ a valores complejos de las variables (θ,ϕ) tales que

$$[\mathbf{L}^2]_S\psi_{\ell,m} = \hbar^2\ell(\ell+1)\psi_{\ell,m}\ ,\quad [L_3]_S\psi_{\ell,m} = \hbar m\psi_{\ell,m}\ .$$

Entonces,

$$\psi_{\ell,m}(\theta,\phi) = \xi_{\ell,m}(\theta)e^{im\phi}$$

y

$$\begin{aligned}\left([\mathbf{L}^2]_S\psi_{\ell,m}\right)(\theta,\phi) &= -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\psi_{\ell,m}(\theta,\phi)\\ &= -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{-m^2}{\sin(\theta)^2}\right)\xi_{\ell,m}(\theta)e^{im\phi}\ ;\end{aligned}$$

luego

$$\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{-m^2}{\sin(\theta)^2} + \ell(\ell+1)\right)\xi_{\ell,m} = 0\ .$$

[2] Vea: .

Es conveniente, hacer el cambio de variables $x = \cos(\theta)$ con $-1 \leq x \leq 1$ que es monótono ya que $0 \leq \theta \leq \pi$ y con $g_{\ell,m}(x) = \xi_{\ell,m}(\arccos(x))$ se obtiene

$$(1-x^2)g''_{\ell,m}(x) - 2xg'_{\ell,m}(x) + \ell(\ell+1)g_{\ell,m}(x) - \frac{m^2}{1-x^2}g_{\ell,m}(x) = 0 \ .$$

Esta es la ecuación diferencial de las funciones de Legendre asociadas P_ℓ^m ($\ell \in \{0,1,2,\cdots\}$, $m \in \{-\ell,-\ell+1,\cdots,\ell-1,\ell\}$) relacionadas con los polinomios de Legendre P_ℓ por la fórmula

$$P_\ell^m(x) = (-)^m \left(1-x^2\right)^{m/2} \left(\frac{d^m P_\ell}{dx^m}\right)(x) \ .$$

De aquí y de las propiedades de los polinomios de Legendre[3] se desprende que P_ℓ^m es el producto de $(1-x^2)^{m/2}$ con un polinomio de grado $\ell - m$ que tiene $\ell - m$ ceros en $(-1,1)$. Se tiene la relación de ortogonalidad (parcial)

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(x)P_k^m(x)dx = \frac{2(\ell+m)!}{(2\ell+1)(l-m)!}\,\delta_{\ell,k} \ .$$

Es conveniente introducir los productos $P_\ell^m(\cos(\theta))e^{im\varphi}$, convenientemente normalizados, conocidos como armónicos esféricos Y_ℓ^m dados por

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = (-)^m\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}}\,P_\ell^M(\cos(\theta))e^{im\varphi} \ ,$$

para $\ell \in \{0,1,2,\cdots\}$ y $m \in \{-\ell,-\ell+1,\cdots,\ell-1,\ell\}$ que gozan de las siguientes propiedades

- $\{Y_\ell^m \ : \ \ell \in \{0,1,2,\cdots\} \ , \quad m \in \{-\ell,-\ell+1,\cdots,\ell-1,\ell\}\}$ es una base ortonormal completa del espacio de Hilbert $L^2(S)$

  $$\langle Y_\ell^m, Y_{\ell'}^{m'}\rangle_{L^2(S)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta)\overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'} \ ,$$

  y para toda $g \in L^2(S)$ se tiene

  $$g = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell,m}Y_\ell^m$$

  con $\|g\|_{L^2(S)}^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}|c_{\ell,m}|^2$ donde

  $$c_{\ell,m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta)\overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}g(\theta,\varphi) \ .$$

- $\left[\widehat{\mathbf{L}}^2\right]_S Y_\ell^m = \hbar^2\ell(\ell+1)$, y $\left[\widehat{L}_3\right]_S Y_\ell^m = \hbar m Y_\ell^m$. Además, por (5.16),

  $$\left[\widehat{L}_\pm\right]_S Y_\ell^m = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm1)}\,Y_\ell^{m\pm1} \ .$$

- $\overline{Y_\ell^m} = (-)^m Y_\ell^{-m}$ y $Y_\ell^m(\pi-\theta,\varphi+\pi) = (-)^\ell Y_\ell^m(\theta,\varphi)$. Esta última propiedad es relevante si se considera el operador de inversión Π en $L^2(\mathbb{R}^3)$ dado por $(\Pi f)(\mathbf{r}) = f(-\mathbf{r})$; o sea $(\Pi f)(r,\theta,\varphi) = f(r,\pi-\theta,\varphi+\pi)$.

[3] Vease: A&S, 22. y 8.

5.7. El grupo $SU(2)$ y su relación con el grupo de rotaciones.

Hacemos una pequena excursión para introducir el grupo $SU(2)$ y su relación con el grupo de rotaciones. Esto será de utilidad cuando consideremos el spin.

5.7.1. Las matrices de Pauli.

Las matrices de Pauli juegan un papel fundamental en la mecánica cuántica de un spin 1/2 y en la teoría del grupo $SU(2)$ formado por las marices 2×2 complejas, unitarias y de determinante 1. Escribimos $\mathcal{M}_2$ para las matrices complejas 2×2. Las tres matrices de Pauli son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Son autoadjuntas de traza nula y su espectro es $\{\pm 1\}$ (por ende son unitariamente equivalentes). También, $\sigma_j^2 = I$ $(j = 1, 2, 3)$ donde I es la matriz identidad en $\mathcal{M}_2$, y $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ y permutaciones cíclicas de los índices. Ambas relaciones se describen en la fórmula

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{j,k}I + i\sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell}\sigma_\ell \ . \tag{5.23}$$

de aquí se desprenden las relaciones de conmutación

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \sum_{\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell}\sigma_\ell \ ,$$

o sea,

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3 \ , \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2 \ , \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1 \ . \tag{5.24}$$

Para lo que sigue será conveniente juntar a las tres matrices de Pauli en un vector $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y considerar en $\mathbb{C}^3$ además del producto escalar y la norma asociada

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{j=1}^{3} \overline{a_j} b_j \ , \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \ ,$$

también el producto

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j,$$

y el producto vectorial

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

cuyas componentes son

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j = \sum_{k,\ell=1}^{3} \epsilon_{j,k,\ell} \, a_j b_k \ , \quad \ell = 1, 2, 3 \ .$$

Se tiene $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ y la fórmula (5.4). Escribimos

$$\overline{\mathbf{a}} = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) \ ,$$

y observamos que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \overline{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}$. Entonces, con $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^3$,

$$\mathbf{a}\cdot\sigma = \sum_{j=1}^{3} a_j\sigma_j = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \ ;$$

y para cualquier matriz $A\in\mathcal{M}_2$,

(5.25) $$A = a_o I + \mathbf{a}\cdot\sigma \ , \quad a_o = \frac{1}{2}tr(A) \ , \quad a_j = \frac{1}{2}tr(A\sigma_j) \ , \quad j = 1,2,3 \ .$$

Esto se verifica calculando directamente u observando que $\langle A, B\rangle = tr(A^*B)/2$ es un producto esclar en el espacio vectorial complejo $\mathcal{M}_2$ que transforma este espacio en un espacio de Hilbert, y que $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es una base ortonormal de este espacio, con lo cual (5.25) es simplemente el desarrollo de A en esa base. Esta expansión es unívoca, luego la matriz A esta caracterizada por el vector $(a_o, a_1, a_2, a_3) = (a_o, \mathbf{a})\in\mathbb{C}^4$. Esto lo denotamos con $A\simeq(a_o,\mathbf{a})$. Si $A\backsimeq(a_o,\mathbf{a})$ entonces

(5.26) $$A^* \backsimeq (\overline{a_o}, \overline{\mathbf{a}})$$

es el 4-vector asociado a la adjunta A^*. Para calcular el 4-vector asociado al producto AB, calculamos primeramente

$$(\mathbf{a}\cdot\sigma)(\mathbf{b}\cdot\sigma) = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k \sigma_j\sigma_k = \sum_{j,k,\ell=1}^{3} a_j b_k (i\epsilon_{j,k,\ell}\sigma_\ell + \delta_{j,k} I)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3}\left(i\sum_{j,k,\ell=1}^{3}\epsilon_{j,k,\ell}a_j b_k\right)\sigma_\ell + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = i\sum_{\ell=1}^{3}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_\ell\sigma_\ell + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = i(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\sigma + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \ ;$$

o sea

(5.27) $$(\mathbf{a}\cdot\sigma)(\mathbf{b}\cdot\sigma) = i(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\sigma + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \ ;$$

una fórmula utilísima. Con esto es inmediato que si $(a_o, \mathbf{a})$ y $(b_o, \mathbf{b})$ son los 4-vectores asociados a A y a B respectivamente, entonces

(5.28) $$AB \backsimeq (a_o b_o + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, a_o\mathbf{b} + b_o\mathbf{a} + i\,\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

es el 4-vector asociado a AB. La representación (5.25) junto con las fórmulas (5.26) y (5.28) proveen de un cálculo eficiente para el álgebra en $\mathcal{M}_2$ que usaremos con provecho al discutir el spin 1/2; ahora lo usamos para determinar los grupos de unitarios y de unitarios de determinante 1.

5.7.2. $U(2)$ y $SU(2)$.

Si U y V son dos operadores unitarios en un espacio de Hilbert, entonces $(UV)^*UV = V^*U^*UV = V^*V = I$ y $UV(UV)^* = UVV^*U^* = I$ con lo cual UV es unitario; luego los operadores unitarios sobre un espacio de Hilbert forman un grupo. En dimensión finita n, este grupo se denomina $U(n)$. Recuerde que en dimensión finita la unitaridad de U es equivalente a cualquiera de las relaciones $U^*U = I$ o $UU^* = I$, y además, U es diagonalizable por ser normal. La determinante de U es igual al producto de los n autovalores y por ende es de módulo 1. Como $det(AB) = det(A)det(B)$, si los unitarios U y V tienen determinante 1 entonces también su producto UV tiene determinante 1; luego los unitarios de determinante 1 en un espacio de Hilbert de dimensión finita n, forman un grupo denominado $SU(n)$. Pasando al caso $n = 2$,

$$U(2) = \{U \in \mathcal{M}_2 : \; U^*U = I\} \; , \;\; SU(2) = \{U \in U(2) : \; det(U) = 1\} \; ;$$

y determinamos la parametrización de estos grupos en términos de 4-vectores. Sea $(u_o, \mathbf{u})$ el 4-vector asociado a un unitario U, con (5.26) y (5.28) el 4-vector asociado a U^*U es $(|u_o|^2 + \overline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} \, , \overline{u_o}\mathbf{u} + u_o\overline{\mathbf{u}} + i\,\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}) = (|u_o|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \, , \overline{u_o}\mathbf{u} + u_o\overline{\mathbf{u}} + i\,(\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}))$. Ya que $(1, \mathbf{0})$ es el 4-vector asociado con la identidad I, obtenemos las relaciones

$$|u_o|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 = 1 \;\; , \;\; \overline{u_o}\mathbf{u} + u_o\overline{\mathbf{u}} + i\,(\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0} \; .$$

La primera indica que el 4-vector $(u_o, \mathbf{u})$ tiene norma 1. Pasamos a considerar la segunda. De las propiedades del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ que persisten en $\mathbb{C}^3$ obtenemos $(\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = (\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}) \cdot \overline{\mathbf{u}} = 0$ y por lo tanto $\langle (\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = \langle (\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}), \overline{\mathbf{u}} \rangle = 0$. Luego, $\langle \overline{u_o}\mathbf{u} + u_o\overline{\mathbf{u}}, \, \overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u} \rangle = 0$ y por el Teorema de Pitágoras

$$0 = \|\overline{u_o}\mathbf{u} + u_o\overline{\mathbf{u}} + i\,(\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u})\|^2 = \|\overline{u_o}\mathbf{u} + u_o\overline{\mathbf{u}}\|^2 + \|\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}\|^2$$

de donde

$$\overline{u_o}\mathbf{u} + u_o\overline{\mathbf{u}} = 0 \; , \;\; \overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{u} = 0 \; .$$

De la segunda obtenemos, que $\overline{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{u}$ son linealmente dependientes, o sea $\overline{\mathbf{u}} = \lambda\mathbf{u}$; como ambos vectores tienen la misma norma tenemos $\lambda = e^{it}$. Entonces, $\mathbf{v} = e^{it/2}\mathbf{u}$ satisface $\overline{\mathbf{v}} = e^{-it/2}\overline{\mathbf{u}} = e^{it/2}\mathbf{u} = \mathbf{v}$ y es por ende real. Con esta información, la primera relación, $\overline{u_o}\mathbf{u} + u_o\overline{\mathbf{u}} = 0$, produce $(\overline{u_o}e^{it/2} + u_oe^{-it/2})\mathbf{v} = 0$; por lo tanto $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ o bien $u_oe^{-it/2}$ es imaginario puro, i.e. $u_o = ie^{it/2}v_o$ con v_o real. Cuando $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, se tiene $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y entonces $|u_o| = 1$ con lo cual u_o también es de la forma $u_o = ie^{it/2}v_o$, con v_o real. Tenemos entonces, $(u_o, \mathbf{u}) = ie^{it/2}(v_o, -i\mathbf{v})$ con $(v_o, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^4$ de largo 1; incoporando el factor i a la fase, hemos demostrado que todo $U \in U(2)$ es de la forma

$$U = e^{i\alpha}(u_o - i\mathbf{u} \cdot \sigma) \; , \;\; (u_o, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^4 \; , \;\; u_o^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \; , \;\; \alpha \in [0, 2\pi) \; .$$

La determinante de U se calcula inmediatamente obteniendo

$$det(U) = e^{2i\alpha} \; .$$

Luego $U \in SU(2)$ si $e^{i\alpha} = \pm 1$, luego, todo $U \in SU(2)$ es de la forma

$$U = (u_o - i\mathbf{u} \cdot \sigma) \; , \;\; (u_o, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^4 \; , \;\; u_o^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \; .$$

Observamos que todo unitario $U \in U(2)$ se escribe $U = \lambda V$ con $V \in SU(2)$ y $|\lambda| = 1$[4]. La siguiente reparametrización de $SU(2)$ será esencial: de $|u_o|^2 + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$ inferimos la existencia de un único $\alpha \in [0, 2\pi]$ tal que $u_o = \cos(\alpha/2)$ $(\in [-1, 1])$ y $\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sin(\alpha/2)$ $(\in [0, 1])$; con lo cual $\mathbf{u} = \sin(\alpha/2)\mathbf{e}$ donde $\mathbf{e}$ es un vector real de largo 1 que es unívoco salvo en el caso $\alpha = 0$ o $\alpha = 2\pi$ cuando es arbitrario. Esto nos permite reescribir

$$SU(2) = \{\cos(\alpha/2) - i\sin(\alpha/2)\mathbf{e}\cdot\sigma \ : \ \alpha \in [0, 2\pi] \ , \ \ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 \ , \ \ \mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 1\} \ .$$

Pero la fórmula (5.27) indica que si $\mathbf{e}$ es unitario, entonces $(\mathbf{e}\cdot\sigma)^2 = I$, y por ende

$$\exp(it\mathbf{e}\cdot\sigma) = \cos(t)I + i\sin(t)\mathbf{e}\cdot\sigma \ ;$$

o sea

$$SU(2) = \{\exp(-i(\alpha/2)\mathbf{e}\cdot\sigma) : \ \alpha \in [0, 2\pi] \ , \ \ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 \ , \ \ \mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 1\} \ .$$

Esto demuestra que $SU(2)$ es un grupo de Lie con tres parámetros reales (α y los dos parámetros necesarios para especificar a $\mathbf{e}$ o bien los tres números αe_1, αe_2 y αe_3). Las relaciones de conmutación (5.24) indican que los tres generadores asociados

$$J_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 \ , \ \ J_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 \ , \ \ J_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 \ ,$$

satisfacen:

$$\boxed{[J_1, J_2] = iJ_3 \ , \ \ [J_3, J_1] = iJ_2 \ , \ \ [J_2, J_3] = iJ_1} \ , \tag{5.29}$$

y que

$$\boxed{SU(2) = \{\exp(-i\alpha\mathbf{e}\cdot\mathbf{J}) \ : \ \alpha \in [0, 2\pi] \ , \ \ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 \ , \ \ \mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 1\}} \ . \tag{5.30}$$

5.7.3. Representaciones unitarias de $SU(2)$

5.7.4. $SU(2)$ y $SO(3)$

Por lo visto, el grupo de rotaciones o alternativamente $SO(3)$, es (5.6)

$$SO(3) = \{\exp(\alpha\mathbf{e}\cdot\mathbf{G}) : \ \alpha \in [0, 2\pi) \ , \ \ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 \ , \ \ \mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 1\} \ ,$$

donde las tres matrices 3×3 reales G_j $(j = 1, 2, 3)$ satisfacen las relaciones de conmutación (5.7). Para explicitar la relación de $SO(3)$ con $SU(2)$ hacemos la siguiente reparametrización de $SO(3)$: ponemos

$$\mathbf{H} = i\mathbf{G}$$

con lo cual las relaciones de conmutación (5.7) se transforman en

$$\boxed{[H_1, H_2] = iH_3 \ , \ [H_3, H_1] = iH_2 \ , \ \ [H_2, H_3] = iH_1} \ , \tag{5.31}$$

[4]Esto es cierto en cualquier dimensión finita n ya que $1 = det(U^*U) = |det(U)|^2$ indica que $det(U)$ es de módulo 1 y por ende $V = (det(U))^{-1/n}U$ es unitario y de determinante 1; esto reduce entonces el análisis de $U(n)$ al de $SU(n)$.

y

$$SO(3) = \boxed{\{\exp(-i\alpha\mathbf{e}\cdot\mathbf{H}) :\ \alpha \in [0, 2\pi)\ ,\ \ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3\ ,\ \ \mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 1\}}\ . \tag{5.32}$$

Comparando esto con las dos últimas fórmulas del apartado anterior, las relaciones de conmutación para los generadores de $SO(3)$ y $SU(2)$ son idénticas ¿Cual es la diferencia entre $SO(3)$ y $SU(2)$? Simplemente que

$$\exp(-i2\pi\mathbf{e}\cdot\mathbf{H}) = I\ ,\ \ exp(-i2\pi\mathbf{e}\cdot\mathbf{J}) = -I\ (!).$$

En $SO(3)$ la periodicidad en el parámetro angular α es 2π mientras que en $SU(2)$ esta periodicidad es 4π.

Esto se pone de manifiesto geométricamente como sigue: Tomando αe_1, αe_2 y αe_3 como parámetros, $SU(2)$ es lo mismo que la bola de radio 2π en 3 dimensiones. El centro de la bola corresponde a I y la superficie (la esfera) a $-I$. Toda curva cerrada continua en $SU(2)$ puede contraerse a un punto.

$SO(3)$ es lo mismo que el toroide que se obtiene rotando un disco de radio π alrededor de un eje arbitario externo al disco. El disco parametriza todos los ejes de rotación posibles tomando el ángulo polar θ del eje $\mathbf{e}$ ($\theta \in [0, \pi]$) como la distancia al centro del disco y el ángulo azimutal ϕ asociado con $\mathbf{e}$ como ángulo de rotación en el disco (todos los puntos del borde circular del disco corresponden al eje $-e_3$). El ángulo de rotación α me dice en cual de las secciones circulares del anillo estoy. La identidad I se corresponde al disco en $\alpha = 0$. Tomando cualquier punto del toroide y rotandolo por 2π se obtiene un curva cerrada y continua que no puede contraerse a un punto. Si esta curva se recorre dos veces entonces si puede ser contraída a un punto: al volver la primera vez al punto inicial se invierte el sentido de rotación y se vuelve para atrás.; con esto se pasa exactamente dos veces por cada punto de la órbita.

En $SU(2)$ identifique a U con $-U$, y escribiendo $[U] = \{U, -U\}$ sea

$$[U] \circ [V] = [UV]\ .$$

Entonces

$$\mathcal{G} = \{[U] :\ U \in SU(2)\}$$

es un grupo pues $[U] \circ [I] = [U]$ y $[U] \circ [U^*] = [I]$. El mapa $\Phi[U = \exp(-i\alpha\mathbf{e}\cdot\mathbf{J})] = \exp(-i\alpha\mathbf{e}\cdot\mathbf{H}) = D(\mathbf{e}, \alpha)$ define una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{G}$ y $SO(3)$. Pero, ya que $SO(3)$ es una representación de $SU(2)$, tenemos $\Phi[[U] \circ [V]] = \Phi[U][\Phi V]$ con lo cual estos conjuntos son idénticos también como grupos. Esto se verbaliza diciendo que "$SU(2)$ contiene a $SO(3)$ dos veces", o mejor: $SU(2)$ es un cubrimento doble de $SO(3)$. La relación entre los dos grupos es todavía más íntima, como tratamos de explicar a continuación.

En lo que sigue construimos un homomorfismo de $SU(2)$ en $S0(3)$, vale decir un mapa que preserva las operaciones de grupo (composición e inversión). Sea $\mathcal{V}$ el espacio vectorial real de las matrices 2×2 que son simétricas y de traza nula

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a_3 & a_1 + ia_2 \\ a_1 - ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{a}\cdot\sigma :\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}\ ;$$

que en tanto que espacio vectorial real es idéntico a $\mathbb{R}^3$. Recordando el producto escalar $\langle A, B\rangle := tr(AB)/2$ y observando que

$$\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 + ic_1 \\ b_1 - ic_1 & -a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 + ic_2 \\ b_2 - ic_2 & -a_2 \end{pmatrix} \rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

vemos que $\mathcal{V}$ con este producto escalar es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar euclideo. Llamemos $\Lambda : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$ a este isomorfismo.
Ahora, asociamos a cada $U \in SU(2)$ un mapa lineal $\rho(U)$ de $\mathcal{V}$ por

$$\rho(U)A := UAU^* \ , \quad A \in \mathcal{V} \ .$$

Ya que $(UAU^*)^* = UA^*U^* = UAU^*$ y $tr(UAU^*) = tr(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{V}$, $\rho(U) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es lineal; y es invertible pues $\rho(U^*)\rho(U) = id$. Veamos que $\rho(U)$ es ortogonal; en efecto

$$\langle \rho(U)A, \rho(U)B\rangle = \frac{1}{2}tr(UAU^*(UBU^*)) = \frac{1}{2}tr(UABU^*) = \frac{1}{2}tr(AB) = \langle A, B\rangle$$

cualesquiera sean $A, B \in \mathcal{V}$. Esto verifica que $\rho(U) \in O(3)$ para todo $U \in SU(2)$. O sea que $\rho : SU(2) \to O(3) \subset GL(\mathcal{V})$. También,

$$\rho(U)\rho(V)A = U(\rho(V)A)U^* = UVAV^*U^* = UVA(UV)^* = \rho(UV)A$$

para todo $A \in \mathcal{V}$ con lo cual ρ es un homomorfismo de grupos (o bien una representación de $SU(2)$ en el grupo ortogonal $O(3)$). Construyamos ahora explicitamente la ortogonal $\rho(U)$. Con

$$U = \cos(\alpha/2) - i\sin(\alpha/2)\mathbf{e}\cdot\sigma \ , \quad U^* = \cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2)\mathbf{e}\cdot\sigma$$

y

$$A = \mathbf{a}\cdot\sigma \ , \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \ ,$$

tengo usando (5.28), la relación (5.4) y las fórmulas trigonométricas para el doble de un ángulo:

$$UAU^* \backsimeq (0, (\mathbf{e}\cdot\mathbf{a})\mathbf{e} + \cos(\alpha)(\mathbf{a} - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{a})\mathbf{e}) + \sin(\alpha)\mathbf{e}\times\mathbf{a}) \ .$$

Comparando con (5.2) tenemos el resultado:

$$UAU^* \backsimeq (0, D(\mathbf{e}, \alpha)\mathbf{a})$$

o sea:

$$\Lambda\rho(U)\Lambda^{-1} = D(\mathbf{e}, \alpha) \ , \quad U = \cos(\alpha/2) - i\sin(\alpha/2)\mathbf{e}\cdot\sigma \ .$$

Vale decir: si U es el elemento de $SU(2)$ asociado con el vector real uniario $\mathbf{e}$ y el ángulo $\alpha \in [0, 2\pi]$, entonces $\rho(U)$ es la rotación (elemento de $SO(3)$) por α alrededor del eje $\mathbf{e}$.
Es inmediato de la definición de ρ que $\rho(-U) = \rho(U)$ con lo cual ρ resulta ser un isomorfismo del grupo $SO(3)$ con el grupo $\mathcal{G}$ obtenido de $SU(2)$ identificando U con $-U$.

El homomorfismo ρ construido nos permite transformar toda representación $U_{\mathbf{e},\phi}$ (unitaria) de $SO(3)$ en una representación (unitaria) de $SU(2)$, considerando $U_{\rho(X)}$, $X \in SU(2)$. Pero lo inverso no es necesariamente cierto. Por ejemplo, $SU(2)$ es una representación (unitaria) de si mismo en el espacio de Hilbert de dimensión 2, pero no es una representación (unitaria) de $SO(3)$ ya que $\exp(i2\pi\mathbf{e}\cdot\mathbf{J}) \neq I$.

5.7.5. Representaciones unitarias proyectivas

Still missing after all those years !

5.7.6. Toda representación unitaria proyectiva de $SO(3)$ es una representación unitaria de $SU(2)$ y vice-versa