Análisis en $\mathbb{R}^3$

Notas para Electromagnetismo I, 2009.[*]

G.A. Raggio[**]
FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

La referencia general es: Luis A. Santaló, *Vectores y tensores con sus aplicaciones*, Eudeba, Buenos Aires, 1977. Magnífico libro que citaremos en lo que sigue con [S], indicando página o resultado según la duodécima edición de 1981.

Para vectores $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$ el *producto escalar* es $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}:=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{j=1}^3 a_jb_j$. Se usará la convención de sumación de Einstein, la cual omite el signo de adición $\sum$ cuando hay índices repetidos. E.g.,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_jb_j\ .$$

Se tiene $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geq 0$ con igualdad si y sólo si $\mathbf{a}=\mathbf{0}$. Por ende $|\mathbf{a}|:=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$ define una norma en $\mathbb{R}^3$ que es la distancia del punto (a_1,a_2,a_3) al origen[1]. Esta norma satisface la desigualdad

$$|\,|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|\,|\leq|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|\ .$$

Se tiene la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\ ,$$

con igualdad si y sólo si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos[2]. En caso que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ los vectores $\mathbf{a},\mathbf{b}$ se dicen *ortogonales*. El *producto vectorial* de $\mathbf{a},\mathbf{b}$ es el vector

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}:=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)\ .$$

Usando el tensor tridimensional totalmente anti-simétrico ϵ definido por:

$$\epsilon_{jk\ell}:=\begin{cases}1 & ,\quad \text{si } (jk\ell) \text{ es permutación cíclica de } (123)\\ -1 & ,\quad \text{si } (jk\ell) \text{ es permutación de } (123) \text{ pero no cíclica}\\ 0 & ,\quad \text{todos los otros casos, i.e. al menos dos índices son iguales}\end{cases}\ ;$$

Las tres permutaciones cíclicas de (123) son: (123), (312), y (231); las otras tres permutaciones son: (132), (321) y (213) que no son cíclicas.
Se tiene

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})_j=\sum_{k,\ell=1}^3\epsilon_{jk\ell}a_kb_\ell=\epsilon_{jk\ell}a_kb_\ell\ .$$

En los cálculos es de gran utilidad la fórmula

$$\epsilon_{jk\ell}\epsilon_{mn\ell}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\ .$$

Aqui δ es el símbolo de Kronecker

$$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1 & ,\quad \text{si } \alpha=\beta\\ 0 & ,\quad \text{si } \alpha\neq\beta\end{cases}\ ,$$

siendo α y β elementos de un conjunto cualquiera (no vacio). También es cierto que

$$\epsilon_{jk\ell}\epsilon_{mk\ell}=2\delta_{jm}\ .$$

[*] aumentadas y revisadas, marzo 2011.

[**] Correo electrónico: raggio@famaf.unc.edu.ar

[1] A tener en cuenta que $|\mathbf{v}|$ es un número no negativo igual al largo del vector $\mathbf{v}$; y $|a|$ es el módulo del número (real o complejo) a.

[2] Para incluir el caso trivial en el cual uno de los vectores es $\mathbf{0}$, deberiamos decir precisamente que hay igualdad si y sólo si hay $c\in\mathbb{R}$ tal que $\mathbf{a}=c\mathbf{b}$ o bien $\mathbf{b}=c\mathbf{a}$. Esto equivale a decir que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son linealmente dependientes.

Las propiedades básicas del producto vectorial son:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \ , \ \ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \ ,$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \ ;$$

Observese que el producto vectorial no es ni simétrico (el orden importa) ni asociativo (la ubicación de paréntesis no es irrelevante[3]). Además,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \ .$$

Este último producto triple es el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores y se anula por ende cuando dos de ellos son paralelos.

Un tensor afin T de rango 2 es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en si mismo: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, especificada por una matriz real 3×3, (T_{jk}) con $j, k \in \{1, 2, 3\}$, por

$$(T\mathbf{a})_j = \sum_{k=1}^{3} T_{jk} a_k = T_{jk} a_k \ .$$

Campos y operadores diferenciales básicos

Se consideran *campos escalares* ϕ, $\mathbb{R}^3 \supset K \in \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, *campos vectoriales* $\mathbf{A}$, $\mathbb{R}^3 \supset K \in \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$, y *campos tensoriales* T, $\mathbb{R}^3 \supset K \in \mathbf{x} \mapsto T_{jk}(\mathbf{x})$, $j, k = 1, 2, 3$; definidos en algún subconjunto (generalmente abierto) K de $\mathbb{R}^3$. Presuponiendo la diferenciabilidad necesaria se definen los operadores diferenciales más importantes. El *gradiente* de un campo escalar ϕ es el campo vectorial

$$\operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right) \ .$$

Una definición alternativa equivalente e independiente de las coordenadas es

$$\mathbf{e} \cdot (\operatorname{grad} \phi)(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \to 0} [\phi(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{e}) - \phi(\mathbf{x})]/\epsilon \ ,$$

cualquiera sea $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi$ llamamos a ϕ un *potencial* para el campo vectorial $\mathbf{v}$ y decimos que $\mathbf{v}$ es *conservativo*. En tal caso la integral de linea de $\mathbf{v}$ sobre una curva (suave a trozos) cerrada es siempre nula.
La *divergencia* de un campo vectorial $\mathbf{A}$ es el campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}) := \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \ .$$

La *rotación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ es el campo vectorial

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}), \frac{\partial A_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}(\mathbf{x} \right) \ .$$

Usaremos sistematicamente la notación ∇ para grad y, entendiendo al gradiente como un vector cuyas componentes son operadores diferenciales

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \ ,$$

podemos escribir (omitiendo el argumento $\mathbf{x}$)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \ , \ \ \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A} \ .$$

Asi el operador $\mathbf{a} \cdot \nabla$, cualquiera sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ y campo vectorial $\mathbf{B}$ es el campo vectorial

$$((\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{B}(\mathbf{x}))_j := a_1 \frac{\partial B_j}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + a_2 \frac{\partial B_j}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + a_3 \frac{\partial B_j}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \ .$$

El *Laplaciano* Δ de un campo escalar ϕ es el campo escalar

$$\Delta \phi(\mathbf{x}) = \operatorname{div}(\nabla \phi)(\mathbf{x}) := \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}(\mathbf{x}) \ .$$

[3] $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ no tiene sentido.

También es usual el Laplaciano de un campo vectorial $\mathbf{A}$ definido como el campo vectorial

$$\Delta\mathbf{A} := (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)\ .$$

Estos operadores satisfacen las siguientes relaciones e identidades:

$$\mathrm{rot}\,(\nabla\phi) = 0\ ,\quad \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) = 0\ ;$$

$$\mathrm{div}\,(\phi\mathbf{A}) = \phi\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A}\ ;$$
$$\mathrm{div}\,(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\mathrm{rot}\,\mathbf{B})\ ;$$
$$\mathrm{rot}\,(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\wedge\mathbf{A} + \phi(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})\ ;$$
$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathrm{div}\,\mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathrm{div}\,\mathbf{A})\mathbf{B}\ ;$$
$$\nabla(\phi\psi) = \phi(\nabla\psi) + \psi(\nabla\phi)\ ;$$
$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\wedge(\mathrm{rot}\,\mathbf{B}) + \mathbf{B}\wedge(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})\ ;$$
$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) = \nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}\ .$$

La última identidad –válida solamente en coordenadas cartesianas– puede usarse como definición del Laplaciano de un campo vectorial.

Dado su frecuente uso, notamos que para el campo escalar $\mathbf{x}\mapsto r := |\mathbf{x}|$ se tiene:

$$\nabla r = \mathbf{x}/r\ ,\quad \nabla(1/r) = -\mathbf{x}/r^3\ ,\quad \nabla\ f(r) = f'(r)\mathbf{x}/r\ ,$$

si $f : [0,\infty)\to\mathbb{R}$ es diferenciable con derivada f'.

Teoremas fundamentales de Integración

Los teoremas de integración básicos del análisis real en tres dimensiones son los de Gauss[4] y Stokes[5] y sus consecuencias.

Teorema 1 *(Teorema de Gauss) Si $K\subset\mathbb{R}^3$ es cerrado y acotado con borde ∂K suave[6] y $\mathbf{A}$ es un campo vectorial sobre K que es continuamente diferenciable, entonces*

$$\int_K \mathit{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,d^3x = \int_{\partial K}\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{d}\sigma\ .$$

La integral de superficie

$$\int_{\partial K}\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{d}\sigma = \int_{\partial K} A_n(\mathbf{x})d\sigma\ ,$$

es el flujo del campo vectorial a traves de la superficie; A_n es la componente de $\mathbf{A}$ normal a la superficie ∂K y exterior a K, y $d\sigma$ el elemento de superficie. Tenemos

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lim_{K\to\mathbf{x}}\frac{1}{V(K)}\int_{\partial K}\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{d}\sigma\ ,$$

donde $V(K)$ es el volumen de K. Esto provee una definición de la divergencia independiente de las coordenadas y exhibe a esta como flujo infinitesimal. Si $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$ en alguna región entonces el flujo de $\mathbf{A}$ a traves de cualquier superficie dentro de la region se anula y el campo $\mathbf{A}$ se denomina *solenoidal* (la región se dice libre de fuentes).
Cuando $\mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\mathbf{B}$ entonces $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$. Resulta importante determinar bajo que condiciones un campo solenoidal puede escribirse como rotación de otro campo (vease lo que sigue).

Los siguientes resultados surgen como corolarios del Teorema de Gauss.

[4] Johann Carl Friedrich Gauß, 1777 (Braunschweig, Sacro Imperio Romano) - 1855 (Göttingen, Hannover).
[5] George Gabriel Stokes, 1819 (Skreen, Condado de Sligo, Irlanda) - 1903 (Cambridge, Inglaterra).
[6] La suavidad del borde significa que el vector normal a la superficie ∂K es función continua de la posición. La hipótesis de suavidad del borde puede reemplazarse por "suavidad a trozos", o sea ∂K es unión de un número finito de superficies suaves. En el caso en el cual K no es conexo, el miembro derecho ha de entenderse como suma de las integrales de superficie de cada componente conexa.

Teorema 2 *Si ϕ es un campo escalar continuamente diferenciable sobre $K \subset \mathbb{R}^3$ que cumple las condiciones del teorema de Gauss entonces*

$$\int_K \nabla\, \phi(\mathbf{x})\ d^3x = \int_{\partial K} \phi(\mathbf{x}) \mathbf{d}\sigma\ .$$

Teorema 3 *Si $\mathbf{A}$ y K cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss, entonces*

$$\int_K rot\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\ d^3x = -\int_{\partial K} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{d}\sigma$$

Teorema 4 *Sea $T_{jk}(\mathbf{x})$ un campo tensorial continuamente diferenciable definido en K que cumple con las hipótesis del Teorema de Gauss entonces*

$$\int_K \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\ d^3x = \int_{\partial K} T_{jk}(\mathbf{x}) d\sigma_j\ .$$

Teorema 5 *(Teorema de Green[7], o segunda identidad de Green) Si f y g son campos escalares dos veces continuamente diferenciables sobre K que cumple las hipótesis del Teorema de Gauss, entonces*

$$\int_K \{f(\mathbf{x})(\Delta g)(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})(\Delta f)(\mathbf{x})\}\ d^3x = \int_{\partial K} \{f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})\} \cdot \mathbf{d}\sigma\ .$$

El Teorema de Green se extiende al caso donde K no es acotado si tanto f como g decaen lo suficientemente rapidamente a cero en el infinito[8].

Teorema 6 *(Primera identidad de Green) Si f es un campo escalar dos veces continuamente diferenciable y g es un campo escalar continuamente diferenciable ambos definidos sobre $K \subset \mathbb{R}^3$ que cumple con las condiciones del Teorema de Gauss entonces:*

$$\int_K \{g(\mathbf{x})(\Delta f)(\mathbf{x}) + ((\nabla g) \cdot (\nabla f))(\mathbf{x})\}\ d^3x = \int_{\partial K} g(\mathbf{x})(\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\sigma\ .$$

Teorema 7 *(Tercera identidad de Green) Si f es un campo escalar dos veces continuamente diferenciable definido sobre $K \subset \mathbb{R}^3$ que cumple con las condiciones del Teorema de Gauss entonces*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi} \int_K \frac{\Delta f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\ d^3y + \int_{\partial K} \left\{ \frac{\nabla f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \frac{f(\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} \right\} \cdot \mathbf{d}\sigma\ .$$

El Teorema de Stokes es un análogo bidimensional del de Gauss.

Teorema 8 *(Teorema de Stokes) Sea F una superficie orientada, cerrada y acotada con borde ∂F suave y $\mathbf{u}$ un campo vectorial continuamente diferenciable en una región G que contiene a F y ∂F. Entonces*

$$\int_F (rot\,\mathbf{u}) \cdot \mathbf{df} = \int_{\partial F} \mathbf{u} \cdot \mathbf{ds}$$

donde en la integral de linea el elemento de linea $\mathbf{ds}$ *y la normal a la superficie se orientan canónicamente.*

La integral de linea

$$\int_{\partial F} \mathbf{u} \cdot \mathbf{ds} = \int_{\partial F} u_t ds$$

(u_t es la componente de $\mathbf{u}$ tangencial a la curva ∂F) corresponde a la circulación del campo vectorial a lo largo de la curva (cerrada) ∂F e indica cuanto el campo "enrolla a la superficie". Se tiene

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{u})(\mathbf{r}) = \lim_{F \to \mathbf{r}} \frac{1}{S(F)} \int_{\partial F} \mathbf{u} \cdot \mathbf{ds}\ ,$$

donde la superficie F de área $S(F)$ se contrae al punto $\mathbf{r}$. Lo que indica que $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ en $\mathbf{r}$ es la densidad de circulación infinitesimal en $\mathbf{r}$. Esto provee una definición de la rotación independiente de las coordenadas cartesianas. Un campo vectorial $\mathbf{a}$ para el cual $\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$ se dice *irrotacional* o bien *libre de vortices.*

Un corolario es:

[7] George Green, 1793 (Sneiton, Inglaterra)-1841 (Nottingham, Inglaterra).

[8] El Laplaciano es un operador "autoadjunto" actuando sobre funciones de módulo cuadrado integrable.

Teorema 9 *Sea F, ∂F y G como en el Teorema de Stokes y ϕ un campo escalar continuamente diferenciable sobre G. Entonces*

$$\int_F (\nabla\phi) \wedge \mathbf{df} = -\int_{\partial F} \phi \mathbf{ds} \ ,$$

con la misma condición sobre el sentido de integración en la integral de linea que en el Teorema de Stokes.

Solución de $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Si $\mathbf{v} = \nabla\phi$ entonces $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Inversamente ¿todo campo vectorial irrotacional es conservativo? La respuesta es no necesariamente (ejercicio) aunque para regiones simplemente conexas el Teorema de Stokes nos entrega:

Teorema 10 *Si $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ en una region simplemente conexa G donde $\mathbf{v}$ es continuamente diferenciable, entonces para $\mathbf{p} \in G$ fijo, la integral de linea*

$$\phi(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} \ , \ \ \mathbf{x} \in G \ ,$$

es independiente de la curva (suave) que une a $\mathbf{p}$ con $\mathbf{x}$ y define un potencial para $\mathbf{v}$; o sea $\mathbf{v} = \nabla\phi$. Este potencial es único hasta una constante aditiva que depende del punto $\mathbf{p}$.

En particular todo campo libre de vortices en una región simplemente conexa es conservativo. Consulte [S; §23.2].

Solución de $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

Si $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$ entonces $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Al campo vectorial $\mathbf{a}$ se le puede agregar por supuesto $\nabla\phi$, donde el campo escalar ϕ es arbitrario (diferenciable), ya que $\operatorname{rot}(\mathbf{a} + \nabla\phi) = \mathbf{v}$.
Interesa la pregunta (inversa): ¿todo campo vectorial solenoidal es el rotor de algun campo vectorial? Como en el problema anterior la respuesta depende de la estructura geométrica de la región K donde esta definido el campo vectorial. Si K tiene la propiedad de que cualquier superficie cerrada contenida en K encierra un volumen enteramente contenido en K[9] entonces todo campo solenoidal continuamente diferenciable en K es el rotor de otro campo vectorial en K. Pero si esta condición sobre K no se cumple entonces hay campos vectoriales continuamente diferenciables solenoidales en K que no son el rotor de otro campo (ejercicio).

Solución de la ecuación de Poisson

Teorema 11 *Si el campo escalar ϕ es solución de la ecuación de Poisson*

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \ , \ \ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \ ,$$

y para $|\mathbf{r}| =: r \longrightarrow \infty$ se tiene

$$\phi(\mathbf{r}) \longrightarrow 0 \ , \ \ r\nabla\phi(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathbf{0} \ ,$$

entonces

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \, d^3x$$

cuando la integral existe.

Teorema 12 *Si el campo escalar f sobre $\mathbb{R}^3$ es continuo y la integral $\int |f(\mathbf{x})| d^3x$ existe entonces existe*

$$\phi(\mathbf{r}) := -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \, d^3x \ ,$$

y es la única solución de la ecuación de Poisson $\Delta\phi = f$ para la cual $\phi(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(1/r)$ para $r \to \infty$.

Soluciones de la ecuación de Laplace. Funciones armónicas.

[9] Esto se cumple si K es convexo; vale decir el segmento de recta que une cualquier par de puntos de K está contenido en K. Para mas información consulte [S; §23.3 y p. 196]

Una *función armónica* en un abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ es un campo escalar que resuelve la ecuación de Laplace

$$\Delta f = 0 \ , \quad \text{en } K$$

y que es continua en la clausura $\overline{K}$ de K.

Teorema 13 *(Teorema del valor medio) Si f sobre K es armónica y S es una bola de radio R contenida en $\overline{K}$ y centrada en $\mathbf{x}$, entonces*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial S} f(\mathbf{y}) d\sigma \ .$$

Como consecuencia de este resultado tenemos: Si ϕ es armónica en $\mathbb{R}^3$ y decae a cero en el infinito entonces $\phi \equiv o$. Otra consecuencia es:

Teorema 14 *Si ϕ es armónica en el abierto acotado K entonces asume su valor maximo y su valor mínimo en el borde de K:*

$$\min_{\mathbf{y} \in \partial K} \phi(\mathbf{y}) < \phi(\mathbf{x}) < \max_{\mathbf{y} \in \partial K} \phi(\mathbf{y}) \ ,$$

para todo $\mathbf{x} \in K$. En particular, ϕ es identicamente nula si se anula en ∂K.

Descomposición de un campo vectorial en suma de un campo solenoidal y de un campo irrotacional.

La descomposición de un campo vectorial $\mathbf{V}$ definido en un abierto de $\mathbb{R}^3$ en suma

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{Y}$$

de un campo vectorial $\mathbf{W}$ solenoidal (i.e., $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$) y un campo vectorial $\mathbf{Y}$ irrotacional (i.e., $\nabla \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{0}$) es siempre posible[10]. Pero esta descomposición llamada de Helmholtz[11] no es necesariamente unívoca. Además, como vimos, no tiene necesariamente que haber un potencial ϕ tal que $\mathbf{Y} = \nabla\phi$ o un potencial vector $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{W} = \nabla \wedge \mathbf{a}$. Si el campo a descomponer decae lo suficientemente rápido en el infinito, todas estas máculas desaparecen:

Teorema 15 *(Helmholtz) Si el campo vectorial $\mathbf{A}$ sobre $\mathbb{R}^3$ satisface*

$$|\mathbf{A}(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{|x|^{1+\epsilon}} \ , \quad \textit{para todo } \mathbf{x} \textit{ con } |x| > R \ ,$$

donde $C > 0$, $\epsilon > 0$ y $R > 0$; entonces hay una descomposición única

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{x}) \ ,$$

donde $div\mathbf{B} = 0$, $rot\mathbf{C} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{B}, \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{0}$ para $|\mathbf{x}| \to \infty$. Se tiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int (\nabla \wedge \mathbf{A})(\mathbf{y}) \wedge \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \ d^3y \ ,$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int (\nabla \cdot \mathbf{A})(\mathbf{y}) \ \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \ d^3y \ .$$

$\mathbf{C} = \nabla\phi$, y $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{D}$, donde

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \ d^3y \ ;$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \ d^3y \ .$$

Otra pregunta relacionada es ¿podemos reconstruir un campo vectorial a partir de su divergencia y de su rotación? La respuesta general es negativa. Pero si la divergencia y la rotación decaen en el infinito como $r^{2+\epsilon}$ para algún $\epsilon > 0$ entonces la respuesta es afirmativa si queremos que el campo decaiga a cero en el infinito y este campo está dado por las fórmulas del teorema de Helmholtz.

Coordenadas curvilineas ortogonales[12]

[10] Consulte [S; §23.4] para condiciones más precisas.

[11] Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821 (Potsdam, Prusia) – 1894 (Charlottenburg, Imperio Alemán).

[12] El caso de coordenadas curvilineas generales es más complicado y requiere elementos de geometría diferencial. Hay que distinguir componentes covariantes y contravariantes de un vector, etc.

Considerese coordenadas u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^3$. Las superficies de coordenadas están dadas por $u_j = const.$, $j = 1, 2, 3$. En cada punto estas tres superficies se intersectan en tres lineas de coordenadas. Las coordenadas se dicen ortogonales si en cada punto las tangentes a estas tres lineas son dos-a-dos ortogonales entre si. Partiendo del elemento de arco infinitesimal en coordenadas cartesianas, $x_1 = x$, $x_2 = y$, y $x_3 = z$,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{j=1}^{3} dx_j^2 \ ,$$

podemos encontrar este elemento de arco en las nuevas coordenadas si tenemos las funciones $x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3)$, $x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3)$ y $x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$. Con $dx_j = (\partial x_j/\partial u_k) du_k$,

$$ds^2 = \sum_{j,k,\ell=1}^{3} (\partial x_j/\partial u_k) du_k (\partial x_j/\partial u_\ell) du_\ell$$

$$= \sum_{j,k=1}^{3} (\partial x_j/\partial u_k)^2 du_k^2 + \sum_{j,k,\ell=1\,;\,k\neq\ell} (\partial x_j/\partial u_k)(\partial x_j/\partial u_\ell) du_k du_\ell \ .$$

El sistema (u_1, u_2, u_3) se dice *ortogonal* si

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \ ,$$

y no aparecen términos cruzados $du_j du_k$ con $j \neq k$; o sea:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_\ell} = \delta_{k\ell} h_k^2 \ . \tag{1}$$

Los *factores de escala*, o coeficientes de Lamé h_j, dados por

$$h_j = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_j}\right)^2} \ , \quad j = 1, 2, 3 \ ,$$

son en general funciones de (u_1, u_2, u_3). Considerando la transformación inversa del sistema (u_1, u_2, u_3) al cartesiano que es ortogonal, vemos que la ortogonalidad del sistema (u_1, u_2, u_3) es equivalente a

$$\nabla u_j \cdot \nabla u_k = 0 \ , \ \text{para } j \neq k \ .$$

Se introducen vectores $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$, que son unitarios (de largo 1) en las direcciones coordenadas y por ende dos-a-dos ortogonales. El vector de desplazamiento infinitesimal es

$$\mathbf{ds} = \mathbf{e}_1 h_1 du_1 + \mathbf{e}_2 h_2 du_2 + \mathbf{e}_3 h_3 du_3 \ ,$$

y satisface $ds^2 = \mathbf{ds} \cdot \mathbf{ds}$. El elemento infinitesimal de volumen es entonces $h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$.
Para encontrar los vectores $\mathbf{e}_j$ en términos de los vectores canónicos cartesianos $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{e}_z$ se procede de la siguiente manera.

$$\mathbf{ds} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz = \mathbf{e}_x \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_1}{\partial u_j} du_j + \mathbf{e}_y \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_2}{\partial u_j} du_j + \mathbf{e}_z \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_3}{\partial u_j} du_j$$

$$= du_1 \left(\frac{\partial x}{\partial u_1} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u_1} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u_1} \mathbf{e}_z \right) + du_2 \left(\frac{\partial x}{\partial u_2} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u_2} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u_2} \mathbf{e}_z \right)$$

$$+ du_3 \left(\frac{\partial x}{\partial u_3} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u_3} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u_3} \mathbf{e}_z \right) \ .$$

Los vectores

$$\mathbf{a}_j := \frac{\partial x}{\partial u_j} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u_j} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u_j} \mathbf{e}_z \ , \ \ j = 1, 2, 3 \ ,$$

satisfacen entonces $\mathbf{a}_j = h_j \mathbf{e}_j$, $h_j = |\mathbf{a}_j|$.
Introduciendo la matriz *Jacobiana*,

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \ ,$$

cuyos elementos son $\widetilde{J}_{j,k} = (\partial x_j/\partial u_k)$, vemos que las columnas de ella nos dan los coeficientes que multiplican a los vectores de base cartesianos para obtener los nuevos vectores de base (no necesariamente normalizados) $\mathbf{a}_j$. Las coordenadas (u_1, u_2, u_3) son ortogonales exactamente (i.e. (1)) cuando las columnas de $\widetilde{J}$ son dos-a-dos ortogonales. Normalizando las columnas

$$J = \begin{pmatrix} h_1^{-1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & h_2^{-1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} & h_3^{-1}\frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ h_1^{-1}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} & h_2^{-1}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} & h_3^{-1}\frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ h_1^{-1}\frac{\partial x_3}{\partial u_1} & h_2^{-1}\frac{\partial x_3}{\partial u_2} & h_3^{-1}\frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} = \widetilde{J}\, diag(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3)\ ,$$

o bien $J_{j,k} = \widetilde{J}_{j,k} h_k^{-1}$, esta matriz J tiene columnas normalizadas y dos-a-dos ortogonales[13]. Ahora si una matriz cuadrada A es invertible y tiene columnas (respectivamente, filas) ortonormales entonces la matriz transpuesta A^T es la inversa A^{-1} y también las filas (respectivamente, columnas) de A son ortonormales[14]. Por lo tanto, la matriz J es ortogonal y su inversa es igual a su transpuesta J^T y se tiene

$$h_j^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial x_k}{\partial u_j}\ ,\ \ j, k = 1, 2, 3\ .$$

Cada vector $\mathbf{v} = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y + V_z \mathbf{e}_z$ con componentes cartesianas (V_x, V_y, V_z) tiene entonces la representación

$$\mathbf{v} = V_1(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_1 + V_2(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_2 + V_3(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_3$$

donde las coordenadas se obtienen de

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}\ .$$

Las fórmulas obtenidas son generales y válidas para cualquier par de sistemas curvilineos ortogonales.

****

Ejemplo: Para las coordenadas cilíndricas (r, φ, z) $(0 \le r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R})$, tenemos $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, y $z = z$. Luego,

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

$h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$. $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$. Luego, $\mathbf{a}_r = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y$, $\mathbf{a}_\varphi = r(-\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y)$, $\mathbf{a}_z = \mathbf{e}_z$. Y $\mathbf{e}_r = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y$.

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Las coordenadas cilíndricas (V_r, V_φ, V_z) se obtienen entonces de las cartesianas:

$$V_r = \cos(\varphi)V_x + \sin(\varphi)V_y\ ,\ \ V_\varphi = -\sin(\varphi)V_x + \cos(\varphi)V_y\ ,\ \ V_z = V_z\ .$$

Observese que el vector $\mathbf{x} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ se escribe $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$.

****

Para el gradiente, la divergencia, el laplaciano y la rotación se obtienen, respectivamente, la siguientes fórmulas

$$\nabla\phi = \sum_{j=1}^{3} h_j^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial u_j}\, \mathbf{e}_j\ .$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = (h_1 h_2 h_3)^{-1} \left\{ \frac{\partial(h_2 h_3 v_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 v_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 v_3)}{\partial u_3} \right\}\ .$$

[13] Aqui

$$diag(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\ .$$

[14] Alternativamente, considerando la transformación inversa, se deduce (del Teorema de la función inversa multidimensional) que las filas de J también estan normalizadas y son dos-a-dos ortogonales.

$$\Delta\psi = (h_1h_2h_3)^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right\} .$$

$$\nabla\wedge\mathbf{v} = (h_2h_3)^{-1}\left(\frac{\partial(h_3v_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(h_2v_2)}{\partial u_3}\right)\mathbf{e}_1+(h_1h_3)^{-1}\left(\frac{\partial(h_1v_1)}{\partial u_3}-\frac{\partial(h_3v_3)}{\partial u_1}\right)\mathbf{e}_2$$
$$+(h_1h_2)^{-1}\left(\frac{\partial(h_2v_2)}{\partial u_1}-\frac{\partial(h_1v_1)}{\partial u_2}\right)\mathbf{e}_3 .$$

Aqui el campo vectorial es

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3 .$$

La demostración de estas fórmulas es tediosa pero no complicada. Se usa sistemáticamente la regla de la cadena y la ortogonalidad de la matriz J. Como ejemplo, demostramos la fórmula para el gradiente.

Observamos primero que si la transformación de coordenadas $(x,y,z)\to(u_1,u_2,u_3)$ es mediada por una matriz $\widetilde{J}$ de columnas ortogonales, entonces la transformación inversa $(u_1,u_2,u_3)\to(x,y,z)$ es mediada por la matriz $\widetilde{J}^{-1}$

$$\widetilde{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} .$$

Para el gradiente, tenemos

$$\nabla\phi = V_j\mathbf{e}_j = V_1\mathbf{e}_1+V_2\mathbf{e}_2+V_3\mathbf{e}_3 .$$

Y el problema a resolver es expresar las componentes V_j en términos de (derivadas de) ϕ. El cálculo es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} V_1\\ V_2\\ V_3\end{pmatrix} \overset{1)}{=} J^T\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{pmatrix} \overset{2)}{=} J^T\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$\overset{3)}{=} J^T\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial x}\\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial y}\\ \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_3}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_3}\end{pmatrix} \overset{4)}{=} J^T\,(\widetilde{J}^{-1})^T\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_3}\end{pmatrix}$$

$$\overset{5)}{=}\left(\widetilde{J}^{-1}\,J\right)^T\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_3}\end{pmatrix} \overset{6)}{=}\Bigg(\underbrace{\widetilde{J}^{-1}\,\widetilde{J}}_{=diag(1,1,1)}\quad diag(1/h_1,1/h_2,1/h_3)\Bigg)^T\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_3}\end{pmatrix}$$

$$=(diag(1/h_1,1/h_2,1/h_3))^T\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_3}\end{pmatrix} = diag(1/h_1,1/h_2,1/h_3)\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u_3}\end{pmatrix} .$$

Lo que comprueba la fórmula indicada: $V_j = h_j^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial u_j}$.
Los pasos indicados por el número superpuesto al signo $=$ son: 1) Relación entre las coordenadas nuevas y las coordenadas cartesianas. 2) Aplicación de la regla de la cadena; e.g. $\partial\phi/\partial x = (\partial\phi/\partial u_j)(\partial u_j/\partial x)$. 3) Simple rescritura matricial. 4) Identificación de $\widetilde{J}^{-1}$. 5) La transpuesta de un producto es el producto "invertido" de las transpuestas. 6) Definición de J.
Como es costumbre (no siempre sana[15]) no distinguimos notacionalmente a $\phi(x,y,z)$ de $\phi(u_1,u_2,u_3) := \phi(x(u_1,u_2,u_3),y(u_1,u_2,u_3),z(u_1,u_2,u_3))$.

[S; §17] presenta un tratamiento geométrico directo que también se incluye en el apéndice B del libro de D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, y para el caso paricular esférico y cilíndrico en el apéndice III de Panofsky & Phillips *Classical Electricity and Magnetism*. Una referencia para el caso curvilineo general es: G. Temple, *Cartesian Tensors: An introduction* (Methuen & Co, London 1960).

La siguiente tabla explicita los factores de escala para los sistemas de coordenadas más utilizados:

Nombre	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3
Cartesiano	x	y	z	1	1	1
Esférico	r	θ	φ	1	r	$r\sin(\theta)$
Cilíndrico	r	ϕ	z	1	r	1

[15] ¿Que es $\phi(2,3,17)$?