La Resolución de Triángulos Oblicuángulos usando la Calculadora Científica

(Con un Apéndice sobre el cálculo del argumento de un número complejo)

Adolfo Aguirre - Carlos Arroyo

Como es sabido, antes de la aparición de las calculadoras científicas, la resolución de triángulos oblicuángulos se hacía mediante las tablas de logaritmos (de números y de funciones trigonométricas). Como los logaritmos sólo son aplicables a fórmulas que contienen productos, cocientes , potencias y raíces y no sumas y restas, se podía utilizar el teorema del seno pero no el del coseno.

Recordemos los datos de los cuatro casos de resolución de triángulos en su orden tradicional, que es el correspondiente a los criterios de congruencia de triángulos:

1º) Dos lados y el ángulo comprendido.

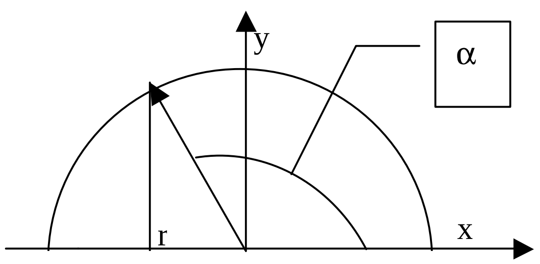
2º) Un lado y dos ángulos igualmente dispuestos.

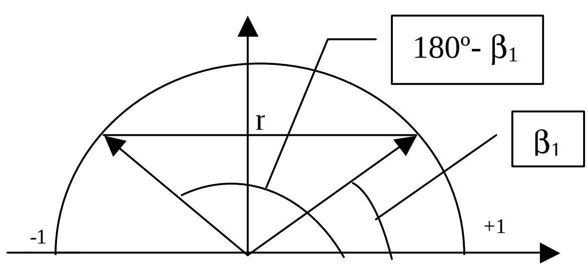
3º) Los tres lados.

4º) Dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos, al que se agregaba el llamado "caso dudoso" : dos lados y el ángulo opuesto al menor de ellos.

Como se sabe, el 2º y el 4º caso (incluida la discusión del caso dudoso) se resuelven usando el teorema del seno y la relación A + B +C = 180º, por lo que el tratamiento clásico se conserva. No nos referiremos a ellos.

En cambio los casos 1º y 3º exigen el teorema del coseno y entonces se recurría antiguamente a complicadas "fórmulas logarítmicas": el teorema de las tangentes, las fórmulas de los ángulos medios y la fórmula de Herón. Todas estas complicaciones hoy son innecesarias, gracias a la maravillosa aparición de la calculadora científica.. Hoy se puede resolver estos dos casos usando sólo los teoremas del seno y del coseno, más la fórmula de la suma de los ángulos. Cuando estos teoremas se usan para calcular lados no hay problemas, pero cuando se emplean para hallar ángulos pueden aparecer dificultades.





Recordemos que dado un número real r comprendido entre –1 y +1, entre 0º y 180º, hay uno y sólo un ángulo α tal que cos α = r (que es el dado por la calculadora), pero en cambio si r $\geq$ 0 existen dos valores β tales que sen β = r (salvo cuando r = 1, en cuyo caso sólo existe el valor β = 90º). Estos dos valores de β son suplementarios, si uno es β_1, el otro es 180º - β_1. La calculadora solamente da el valor agudo y no el obtuso. Las dos figuras que ilustran cada caso aparecen en pág. 33.

Se concluye de esto que en estos casos 1º y 3º, cuando ya se tienen los tres lados (en el primer caso, el primer paso obligatorio es calcular el tercer lado con el teorema del coseno), lo más seguro para calcular los ángulos es utilizar el teorema del coseno, ya que el valor que dará la calculadora será el correcto. Es decir, se calcula el ángulo A mediante $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.(Nota 1: En el tercer caso se suele decir que hay que verificar la condición de que el mayor de los lados sea menor que la suma de los otros dos, pero si no se hace esta comprobación, la incompatibilidad de los datos aparecerá al calcular cualquier ángulo, ya que el valor del segundo miembro estará fuera del intervalo (-1,+1) y la máquina dará error o bien 0º o 180º (dejamos la justificación de este hecho para el lector). Nota 2: La máquina puede dar error en el caso de ángulos muy cercanos a 0º, 90º 0 180º por redondeos; convendrá en tal caso rehacer los cálculos con mayor precisión.)

Por razones de una sana pedagogía que aconseja utilizar en cada situación todos los conocimientos provistos al alumno, es comprensible que no se quiera excluir al teorema del seno en estos casos 1º y 3º; además en el 1º caso, todos los textos indican que se calcule uno de los ángulos desconocidos con el teorema del seno, y en el 3º caso también sería aconsejable usar ambos teoremas.

Se plantea entonces la siguiente cuestión: ¿Qué ángulo conviene calcular, digamos B o C (o sea suponemos dados o ya calculados a, b, c y A), para tener la seguridad de que el valor de la calculadora (el ángulo agudo) es el correcto?

El propósito central de esta nota es mostrar una simple regla que responde a esta cuestión y que hallamos hace bastante tiempo, pero que no vemos mencionada en los textos y más aún, hemos encontrado en una página de Internet, que un catedrático español comete el error de tomar siempre el ángulo agudo, en triángulos donde debería haber tomado el obtuso.

La página donde se encuentran detalles es
descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Resolucion_triangulos_oblicuangulos/Resolucion_TO_indice.htm (los casos 1º y 3º están intercambiados respecto al orden clásico).

Se ve al usar el diagrama interactivo (en el 1º caso clásico), que cuando se varían los datos hasta tener un triángulo oblicuángulo, la solución que da el software puesto en el ángulo superior izquierdo, da siempre ángulo agudo.

Véase también la página: perso.wanadoo.es/drmendi/trigonometriaescaleno.htm, donde no se cometen errores, pues se usan los dos valores suplementarios, al precio de un largo análisis de casos.
La simple regla es: Calcúlese de los dos ángulos, aquel cuyo lado opuesto sea menor.
Así, si por ejemplo, b < c, se calcula el B. Esto es se aplica $sen\,B = \dfrac{b\,sen\,A}{a}$, y se toma para B el valor de la calculadora, o sea el ángulo agudo.

La justificación es inmediata. Recordemos que en todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo (y recíprocamente, a mayor ángulo se opone mayor lado) y que un triángulo no puede tener dos ángulos rectos u obtusos o uno recto y otro obtuso. Entonces, si b < c, lo que implica B < C, no puede ser B recto u obtuso, pues entonces C sería obtuso, lo que contradice lo antes dicho. Luego B seguramente es agudo.
(Nota: Descartamos el caso b = c, pues entonces el triángulo es isósceles y conviene resolverlo por descomposición en dos triángulos rectángulos; aunque se puede usar el teorema del seno aplicado a cualquiera de los ángulos B o C, que son congruentes y agudos).

Hay otra regla, que se desprende de dos ejercicios propuestos en el texto: Matemática 2 para Polimodal de María Amalia Fones (Kapelusz) (Pág. 30, Ejerc. 2 y 3).

Conocidos los tres lados, del teorema del coseno resulta: $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, y entonces, según que $a^2 + c^2 > b^2$ ó $a^2 + c^2 = b^2$ ó $a^2 + c^2 < b^2$, el ángulo B será agudo, recto u obtuso, respectivamente. Se podrá entonces aplicar el teorema del seno para calcular B y tomar el valor de la calculadora o su suplementario según la desigualdad que se verifique. La regla es un poco más complicada que la nuestra, pero tiene la ventaja (¡o desventaja, según se la vea!) de no requerir que se recuerde la propiedad de que a mayor lado se opone mayor ángulo.

¿Cómo se puede verificar en el 1º o 3º casos que la solución obtenida es la correcta, es decir que los valores calculados corresponden al único triángulo solución? Simplemente viendo que se cumple el teorema del seno (y que A + B + C = 180º, para el caso en que el tercer lado se haya calculado con teorema del seno o del coseno).

Para cerrar esta parte de la nota damos un ejemplo numérico del primer caso.

Sean C = 40º , a = 8 , b = 3.

En la primera de las páginas Web mencionadas antes, se da como solución:

C = 6,02 , A = 58,69º , B = 81,31º.

El valor de c es correcto; luego calculó el ángulo A, tal como lo indica en las explicaciones, y tomó el valor agudo que da la calculadora, y por último, obtuvo B = 180º - (A + C). Si verificamos el teorema del seno: $\dfrac{sen\,A}{a} = \dfrac{sen\,B}{b} = \dfrac{sen\,C}{c}$ nos da los valores: 0,1068 ; 0,3295 ; 0,1068 , o sea no se cumple. Por lo tanto, la solución es incorrecta.

Como b < c, de acuerdo a nuestra regla calculamos el ángulo B (que debe ser agudo) mediante el teorema del seno: $sen\,B = \frac{b\,sen\,C}{c}$, que da B = 18,68º = 18º 41' y luego: A = 180º - (B + C) = 121,32 = 121º 19', que es el suplementario del incorrecto valor anterior. Obviamente, se cumple el teorema del seno: todos los cocientes dan 0,1068.

Suponiendo que queremos calcular con el teorema del seno el ángulo A primero, utilizamos la segunda regla y calculamos el valor de la expresión: $b^2 + c^2 - a^2 =$ $= -18,76 < 0$; por lo tanto A es obtuso y hay que tomar el suplementario del valor que da la calculadora.

APÉNDICE : CÁLCULO DEL ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado un número complejo en forma binómica $z = x + i\,y \neq 0$, que se quiere pasar a la forma polar : $z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, se plantean los problemas de calcular r y θ en función de x y y (ye); es exactamente la misma cuestión que pasar de coordenadas cartesianas a polares.

Mientras el cálculo del módulo : $|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$, no presenta dificultades, el del argumento plantea varias dudas. De entrada se comete un error gramatical al decir "el" argumento, con artículo definido, pues sabemos que la forma polar no cambia al sumar a θ cualquier múltiplo entero de 2π (= 360º), es decir existen infinitas determinaciones para θ . Así son argumentos de i los infinitos ángulos 90º + k 360º, o sea $\pi/2 + 2k\pi$, donde k es un entero arbitrario. Para evitar el uso de esta "función multiforme" (como se decía antiguamente), se elige una determinación única, fijando un rango de 2π (= 360º). Son dos las elecciones más usadas: 1º) la tradicional, en el intervalo $[0, 2\pi)$; 2º) la moderna, en el intervalo $(-\pi, \pi]$ (esta última es la usada en las calculadoras científicas, así que nos limitaremos a ella en lo sucesivo). Fijado el intervalo, hay una única determinación del argumento en el mismo, y se la llama "el argumento principal de z", donde ahora el uso del artículo definido es correcto. Se lo simboliza con Arg z y representa una verdadera función. El símbolo ambiguo arg se deja para referirse a cualquier determinación del argumento.

Por ejemplo, tenemos: Arg (-1+i) = 135º , Arg (1-i) = - 45º , Arg (-1-i) = - 135º, Arg (-1) = 180º; en cambio 225º es "un" valor de arg (-1-i).

Aparece ahora el problema principal : ¿ Cómo se calcula este argumento principal ?, o sea, ¿ Cuál es la fórmula para Arg z en función de x y y ?

En muchos textos se dice que $\quad \mathrm{Arg}\, z = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}$ (1) , pero esto no es correcto, pues como recordará el lector del curso Análisis Matemático I, arc tg se emplea para simbolizar una "verdadera" función, a saber, la rama principal de la misma, la cual toma valores solamente en el intervalo $(-\pi/2\ ,\ +\pi/2)$ y como este intervalo de ángulos cubre los cuadrantes 1º y 4º (abiertos), sólo en ellos es válida la (1). (Nota 1: Las calculadoras científicas trabajan precisamente con esta función arc tg. Nota 2: Si se cambia (1) por $\mathrm{arg}\, z = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}$ y se piensan ambos miembros como las viejas "funciones multiformes", o más correctamente, como los conjuntos infinitos de valores asociados, tampoco es cierta, pues, por ejemplo para $z = 1 + i$, se tiene A = { 45º + 360º k } para el primer miembro y para el segundo, B = { 45º + 180º k } y A está incluido estrictamente en B.)

Para convertir la (1) en una fórmula que valga en los restantes cuadrantes, consideremos un complejo z = x + i y (no imaginario puro) del segundo cuadrante y tomemos su opuesto - z = - x - i y , que pertenecerá al cuarto cuadrante. Es evidente entonces que Arg z = Arg (-z) + π , y por lo tanto:

$$\text{Arg } z = \text{arc tg } \frac{-y}{-x} + \pi = \text{arc tg } \frac{y}{x} + \pi$$

Esta fórmula da también el valor correcto π para los reales negativos.

En forma análoga si z está en el tercer cuadrante (pero no en los semiejes que lo limitan), - z estará en el primer cuadrante y se verificará que Arg z = Arg (- z) - π .

En consecuencia :

$$\text{Arg } z = \text{arc tg } \frac{y}{x} - \pi \ .$$

Sólo quedan por tratar los imaginarios puros i y , para los cuales Arg (i y) vale + π/2 si y es positivo y - π/2 si y es negativo.

En resumen, la fórmula (1), sencilla pero insuficiente, debe reemplazarse por la siguiente, que expresa a Arg z mediante distintas expresiones, cada una válida en un subconjunto del plano, formando dichos subconjuntos una partición del plano sin el origen:

$$\text{Arg } z = \begin{cases} arc\,tg\ \dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\[2ex] arc\ tg\ \dfrac{y}{x} + p & \text{si } x < 0\ ,\ y \geq 0 \\[2ex] arc\ tg\ \dfrac{y}{x} - p & \text{si } x < 0\ ,\ y < 0 \\[2ex] +\dfrac{p}{2} & \text{si } x = 0\ ,\ y > 0 \\[2ex] -\dfrac{p}{2} & \text{si } x = 0\ ,\ y < 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Naturalmente que en la práctica conviene recurrir al procedimiento de pasar de coordenadas cartesianas a polares, que traen todas las calculadoras científicas, en variadas formas.

Lo que hemos querido con este apéndice es señalar las serias debilidades de la fórmula (1) y cómo superarlas con la (2). Con ello se logra tener el correcto par de fórmulas para pasar de coordenadas cartesianas a polares, tal como para el pasaje inverso se dispone de las simples e inobjetables fórmulas : $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$.

Nota adicional: Hay otras formas de expresar el Arg z correctamente, distintas de la (2).
Incluimos a continuación otras dos, cuya justificación hará fácilmente el lector.

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arc\,cotg} x/y \ , \ \text{si } y > 0 \\ \operatorname{arc\,cotg} x/y - \pi \ , \ \text{si } y < 0 \\ 0 \ , \ \text{si } y = 0 \ , \ x > 0 \\ \pi \ , \ \text{si } y = 0 \ , \ x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

En la siguiente empleamos la función signo sgn , definida por : sgn x = + 1 , si x > 0 , sgn x = - 1 , si x < 0 , sgn 0 = 0 :

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} (\operatorname{sgn} y)\, \pi/2 - \operatorname{arc\,tg} x/y \ , \ \text{si } y \neq 0 \\ (1 - \operatorname{sgn} x)\, \pi/2 \ , \ \text{si } y = 0 \end{cases} \tag{4}$$

La relación (4) se puede obtener de la (3) usando la conocida relación :

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x = \pi/2.$$

Catamarca , Agosto de 2005.