

# Inversión circular de las secciones cónicas

*Castillo Sergio Daniel(\*)*

## **Indice**

### **introducción**

#### **I. inversión circular**

**I.1.** Definición y generalidades.

**I.2.** Ecuaciones de una inversión

#### **II. Inversión de las Secciones Cónicas**

**II.1.** Inversión de la Hipérbola equilátera.

**II.2.** Inversión de la Parábola.

#### **III. Lemniscata**

**III.1.** Podaria de la Hipérbola equilátera respecto de su centro

**III.2.** La Lemniscata como lugar geométrico

**III.3.** Construcción por puntos de una Lemniscata

**III.4.** Descubriendo algunas otras propiedades de la Lemniscata.

**III.5.** Ejercicios propuestos.

#### **IV. Cisoide y Estrofoide**

**IV.1.** Construcción por puntos de una Cisoide de Diocles.

**IV.2.** Podarias de una Parábola.

#### **V. Ejercicios**

#### **Notas**

#### **Referencias**

## **Introducción**

Algunas veces resulta útil, en geometría, construir una figura auxiliar para resolver un problema. Así, por ejemplo, para demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, se suele trazar la paralela a uno de los lados que pasa por un vértice; otros problemas requieren, también, construcciones similares.

Por caso, el siguiente interrogante sobre cónicas, podría requerir una solución de ese tipo. En efecto, dada una hipérbola equilátera cualquiera, ¿Cómo hallar una circunferencia “tangente” a ambas ramas de la misma y que, además, pase por su centro?. Veremos que, usando una inversión apropiada, se puede obtener una solución en no más de cuatro pasos. Para esto, no obstante, será necesario conocer algunas propiedades de la inversión de las cónicas lo que nos sumergirá en el estudio de ciertas curvas clásicas (la Cisoide de Diocles, la estrofoide y la Lemniscata de Bernoulli),

campo bellísimo de las matemáticas y de gran valor histórico. Veremos también que la excursión por estos temas nos aportará elementos para solucionar problemas de índole muy distinta al planteado inicialmente (esto es, el de construir por puntos una estrofoide y una Cisoide, partiendo de una parábola y usando solamente una escuadra; o bien, el de probar que una estrofoide y una circunferencia se intersecan en a lo sumo cuatro puntos).

Con todo, el formato de esta presentación posee una peculiaridad. Y es que aquí se usan fuertemente los recursos informáticos. Pero no sólo como un buen medio expositivo (cosa que, dicho sea de paso, nadie discutiría en nuestros días) sino, más bien, como una *herramienta para inferir resultados*, que después, naturalmente, habrán de ser afirmados o refutados por una demostración. En particular, usaremos algunas funciones del Cabri para hallar lugares geométricos y para observar algunas propiedades métricas y angulares de la Lemniscata. Las construcciones y ejercicios que aquí se proponen varían en su grado de dificultad y requieren, en mayor o menor medida, de algunas de estas funciones para su mejor resolución. Se ha hecho todo lo posible para que las consignas sean abiertas, es decir, para que fomenten la experimentación y el espíritu de indagación del estudiante y no se agoten en una respuesta única y definitiva. Cuando se proponga hallar una construcción distinta a una dada, es para instar a la búsqueda de distintos caminos en la resolución de un problema, cosa en la que hacemos especial hincapié. La propuesta está pensada como parte de un curso sobre cónicas y exige algunos conocimientos básicos sobre inversión y construcciones.

## I. Inversión Circular

**I.1. Definición y generalidades.** En un plano dado, sea  $C$  circunferencia de centro  $o$  (al que llamaremos centro o polo de inversión) y radio  $k$ . Sea  $p$  un punto del plano distinto de  $o$  y  $p'$  un punto perteneciente a la semirrecta  $\overrightarrow{op}$ ; decimos que  $p'$  es el inverso de  $p$  respecto a  $C$ , si se cumple

$$\overline{op} \cdot \overline{op'} = k^2$$

De aquí se sigue, claramente, que si  $p'$  es el inverso de  $p$  respecto a  $C$ , entonces  $p$  es el inverso de  $p'$  respecto a  $C$ . Obsérvese, además, que la inversión intercambia el interior con el exterior de  $C$ , ya que si  $\overline{op} < k$ , entonces  $\overline{op'} > k$ , dejando fija la circunferencia de inversión, pues si  $p \in C$ , entonces  $p = p'$ , y, por tanto,  $p' \in C$ .

La expresión anterior deja indefinida la imagen de  $o$ ; no obstante, eso no nos impide imaginar que si  $p$  es un punto móvil que se aproxima tanto como queramos a  $o$ , su imagen,  $p'$ , se alejará cada vez más de dicho centro. De ahí que, a veces, se dice que “ $o$  va al punto del infinito” dejando traslucir la idea de que la inversión es una transformación biyectiva del plano en sí mismo.

Una de las principales propiedades de la inversión es que, en general, “destruye” las distancias “conservando”, al mismo tiempo, los ángulos de las figuras. Se puede probar, por caso, que una recta que pase por  $o$  queda estable, en tanto que una recta que no pase por  $o$  se transforma en una circunferencia que pasa por  $o$ . Asimismo, una circunferencia que pasa por  $o$  va a una recta que no pasa por  $o$  y, finalmente, una circunferencia que no pasa por  $o$  se transforma en otra circunferencia que tampoco pasa por  $o$ . Para el estudio que nos proponemos será de suma utilidad mirar a la inversión desde el punto de vista de la geometría analítica<sup>2</sup>.

**I.2. Ecuaciones de una inversión.** Analíticamente, una inversión cuyo centro coincide con el origen de los ejes cartesianos, queda determinada por el siguiente par de ecuaciones de transformación

$$x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} \quad y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2}$$

donde  $\sqrt{k}$  es el radio de la circunferencia de inversión y  $(x, y), (x', y')$ , son las coordenadas de  $p$  y  $p'$  respectivamente.

En efecto, por I.1. el punto  $p'$  está sobre la semirrecta  $\overrightarrow{op}$ . Luego, los  $\Delta opm$ ,  $\Delta op'm'$ , (fig. 1) son semejantes, de donde

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{\overline{op}}{\overline{op'}}$$

Además, sabemos que

$$\overline{op} \cdot \overline{op'} = k$$

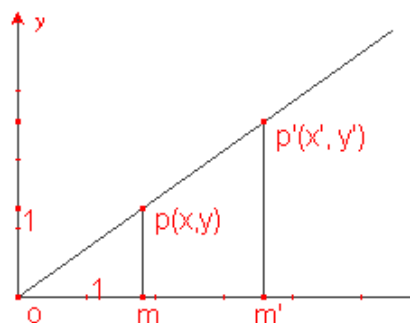


fig. 1.

Dividiendo por  $\overline{op'}^2$  esta expresión nos queda

$$\frac{\overline{op}}{\overline{op'}} = \frac{k}{\overline{op'}^2} = \frac{k}{x'^2 + y'^2}$$

y, reemplazando en la anterior obtenemos,

$$x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} \quad , \quad y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2}$$

como buscábamos. Además, por lo observado en I.1.

$$x' = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2}$$

pues, como dijimos,  $p$  es el inverso de  $p'$ .

## II. Inversión de las secciones cónicas.

**II.1. Inversión de la hipérbola equilátera.** Veamos qué pasa cuando el polo de inversión coincide con el centro de la hipérbola. Tenemos, en este caso, una ecuación de la forma

$$x^2 - y^2 = a^2$$

La ecuación de la curva inversa será, según acabamos de ver

$$\frac{(kx')^2}{(x'^2 + y'^2)^2} - \frac{(ky')^2}{(x'^2 + y'^2)^2} = a^2$$

Reacomodando los términos nos queda

$$(x'^2 + y'^2)^2 = (k/a)^2 \cdot (x'^2 - y'^2)$$

Reemplazando  $k/a$  por  $w \cdot \sqrt{2}$  y eliminando las “primas” obtenemos la ecuación de la lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = 2w^2(x^2 - y^2)$$

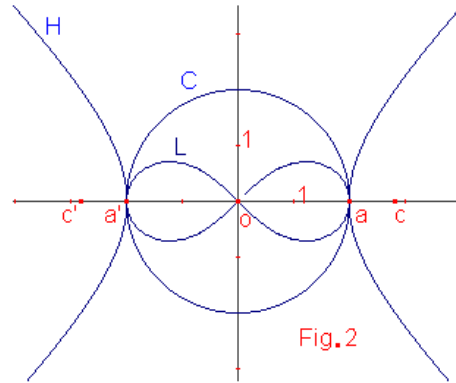
A los puntos  $(w,0)$  y  $(-w,0)$  se les da el nombre de focos.

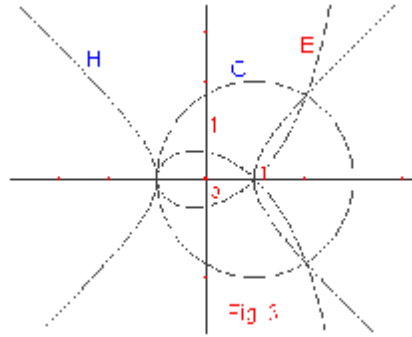
En consecuencia, *la inversa de una hipérbola equilátera, cuando el polo de inversión coincide con el centro de la hipérbola, es una lemniscata de Bernoulli.*

La Lemniscata fue descrita por primera vez por Jacob Bernoulli en 1694, al parecer, como modificación de una elipse. Es un caso particular de las curvas estudiadas por Cassini, catorce años antes, en 1680. En la fig. 2 se muestra su gráfica para el caso en que la circunferencia de inversión coincide con la circunferencia principal de H.

\*\*\*

Veamos, ahora, qué ocurre si el polo de inversión coincide con uno de sus vértices. (Fig.3)





Tomemos, sin perder generalidad, el vértice derecho de la hipérbola como origen del sistema de coordenadas y obtendremos la expresión

$$x^2 - y^2 + 2ax = 0$$

Su curva inversa será, entonces,

$$\frac{(kx')^2}{(x'^2 + y'^2)^2} - \frac{(ky')^2}{(x'^2 + y'^2)^2} + \frac{2akx'}{x'^2 + y'^2} = 0$$

o, equivalentemente,

$$(kx')^2 - (ky')^2 + 2akx'(x'^2 + y'^2) = 0$$

dividiendo por  $2ak$ , y reemplazando  $k/2a$  por  $a'$ , nos queda

$$a'x'^2 - a'y'^2 + x'(x'^2 + y'^2) = 0$$

eliminando las “primas”, y despejando  $y^2$  resulta

$$y^2 = x^2 \frac{(x + a')}{(a' - x)}$$

que es la ecuación de la estrofoide. Por lo tanto, *la inversa de la hipérbola equilátera es la estrofoide si el polo de inversión es el vértice de la hipérbola.*

**II.2. Inversión de la parábola.** Si la parábola está en la forma estándar su ecuación será

$$y^2 = 2px$$

Aplicando la inversa respecto al origen

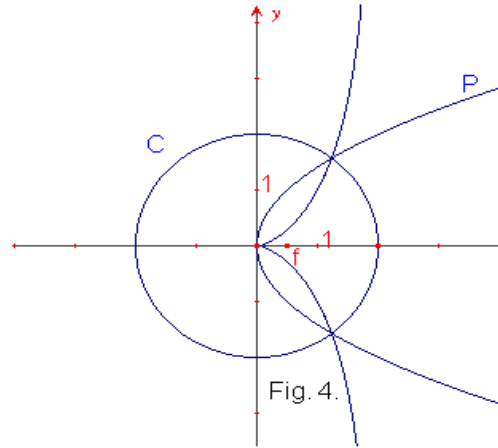
$$\frac{(ky')^2}{(x'^2+y'^2)^2} = 2p \frac{kx'}{x'^2+y'^2}$$

o lo que es lo mismo

$$(ky')^2 = 2pkx'(x'^2+y'^2)$$

eliminando las “primas”, reemplazando  $k/2p$  por  $2a$  y despejando  $x^3$  nos queda  $x^3 = y^2(2a - x)$  que es la ecuación de la Cisoide. Luego, *La inversa de la parábola es la Cisoide de Diocles si el vértice de la parábola es el centro de la inversión*<sup>3</sup>.

Se llama así porque se atribuye a Diocles, matemático griego del s. II a. C., su descubrimiento. La utilizó para solucionar el problema de la duplicación del cubo.



### III. Lemniscata

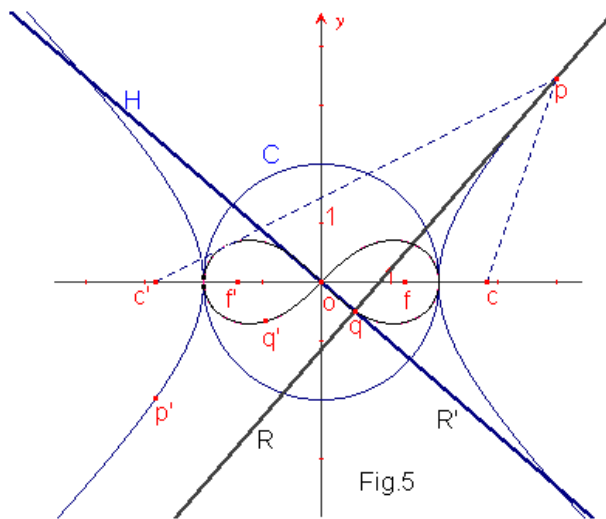
En lo que va de esta presentación hemos usado el Cabri sólo para realizar los gráficos que aparecen acompañando a las expresiones anteriores. En lo que sigue, veremos cómo algunas herramientas de este programa nos ayudarán a “descubrir” ciertas propiedades de la Lemniscata. Mediante un ejemplo se comprobará, después, que las hipótesis que sugiere la observación no son siempre verdaderas.

**III.1. Podaria de la hipérbola equilátera respecto de su centro.** En II.1. obtuvimos una lemniscata a partir de una hipérbola equilátera mediante inversión. Cabría preguntarse si hay una *única* manera de obtener la primera a partir de la segunda. Anticipándonos un poco, diremos que no sólo no es única, sino que, de hecho, puede ser hallada de una forma distinta mediante el sólo empleo de la escuadra, sin auxilio del compás. Para ver esto, será necesario definir, previamente, lo que entendemos por podaria de una curva respecto de un punto.

Si  $F$  es una curva dada cualquiera y  $o$  un punto fijo del plano, se llama podaria de  $F$  respecto de  $o$  al lugar geométrico de los pies de las normales trazadas por el punto  $o$  a las tangentes de  $F$ . (En otras palabras, dado un punto  $p$  de  $F$ , trazamos la tangente a  $F$

por  $p$ , y luego la normal a esta tangente que pasa por  $o$ . El punto de corte  $q$  de ambas rectas describirá la curva podaria a medida que “movamos” el punto  $p$  sobre la curva  $F$ ).

Tomemos, por caso, la hipérbola  $H$  de la Fig.5. de ecuación  $x^2 - y^2 = 4$ , y hagamos el siguiente “experimento”. Colóquese un punto  $p$  sobre una de sus ramas, cualquiera de ellas. Trácese ahora, los segmentos  $\overline{pc}$  y  $\overline{pc'}$  que unen a  $p$  con los focos de  $H$ . La bisectriz  $R$  del ángulo  $\angle cpc'$ , es tangente a  $H$  (suponemos conocida esta propiedad). Sea ahora  $R'$  la perpendicular a  $R$  que pasa por  $o$ , y corta a  $R$  en  $q$ . Señálese, finalmente, la opción *lugar geométrico* para observar la curva que describe  $q$  cuando  $p$  se desplaza sobre  $H$ . Obtenemos así, según la definición anterior, la curva podaria de  $H$  respecto de  $o$ .



*Visualmente*, el gráfico induce a pensar que se trata de una Lemniscata. Para acentuar esta impresión, pintemos la podaria de un color distinto al rojo. Ahora coloquemos otro punto,  $p'$ , sobre  $H$  y calculemos su inverso respecto a la circunferencia principal  $C$ . Llamemos  $q'$ , a este punto. Seleccionemos ahora el *lugar geométrico* que describe  $q'$ , cuando  $p'$  se mueve sobre  $H$ , ¿qué ocurrirá con la podaria, entonces?: Cambiará de color. Eso nos da la idea de que ambas curvas se “superponen”.

Una observación apresurada concluiría de aquí, que se ha probado ya la igualdad entre ambos lugares geométricos. Sin embargo, hasta el momento no hemos probado nada. Por lo pronto, sólo tenemos fuertes indicios para pensar que esto es así, pero todavía falta demostrarlo. Es lo que haremos a continuación.

Retomemos el caso general. Si  $p(x_o, y_o)$  pertenece a la hipérbola equilátera  $H: x^2 - y^2 = a^2$ , la ecuación de la recta tangente a  $H$  que pasa por  $p$  será<sup>4</sup>

$$x_o x - y_o y = a^2$$

y la normal por el origen

$$y_o x + x_o y = 0$$

De aquí se sigue que

$$x_o = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \quad , \quad y_o = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}$$

Reemplazando en la ecuación de H nos queda

$$\left( \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \right)^2 - \left( \frac{a^2 y}{x^2 + y^2} \right)^2 = a^2$$

Y, reacomodando los términos

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

Que es la ecuación de la Lemniscata. Por otra parte, cuando H se invierte respecto de la circunferencia principal, se tiene que  $\sqrt{k} = a$ , (siendo  $\sqrt{k}$ , al igual que en II.1, el radio de la circunferencia de inversión), lo que implica que  $k^2/a^2 = a^4/a^2 = a^2$ , y reemplazando en la ecuación de la Lemniscata dada en II.1 obtenemos nuevamente la expresión de la podaria de H respecto del origen. Por lo tanto, *la podaria de una hipérbola equilátera H respecto del origen es una Lemniscata que coincide con la inversa de H respecto de la circunferencia principal*, como pretendíamos demostrar.

**III.2. La Lemniscata como lugar geométrico.** Mostrar a la Lemniscata como lugar geométrico significa especificar qué condiciones deben cumplir los puntos del plano para pertenecer a ella. Tal información, podría obtenerse con la sola discusión de su expresión analítica. Nosotros, en cambio, intentaremos obtenerla de un modo más experimental.

La hipérbola es, por definición, el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos dados (focos), es constante, en términos absolutos. Los focos, pues, nos aportan gran parte de la información que necesitamos para el conocimiento de una hipérbola. Sabemos, además, que su inversa es una lemniscata. Así que, una manera razonable de comenzar a estudiar la lemniscata sería preguntándonos ¿qué relación tienen sus puntos con los focos  $c, c'$ , de H y, principalmente, con la inversa de esos focos,  $f, f'$  ?.

Analizando esta relación, se puede demostrar que *los focos de una hipérbola equilátera se transforman en focos de una lemniscata, mediante inversión* (verificar). Pero obsérvese, no obstante, que lo único que sabemos sobre los focos de la lemniscata es que cumplen con la propiedad analítica dada en II.1. Veamos cuál es su significado geométrico, si es que lo tiene.



Tómese nuevamente la fig.5. En la tabla (a) se han asentado los valores de las distancias de  $q$  a los puntos  $c, c', f$  y  $f'$ , a medida que desplazamos el punto  $p$  sobre la rama derecha de H. En la quinta y sexta columnas se han relacionado de diferentes maneras estas distancias.

Tabla (a)

	$d(q,c)$	$d(q,c')$	$d(q,f)$	$d(q,f')$	$d(q,c) \cdot d(q,c')$	$d(q,f) \cdot d(q,f')$
1	2,30	3,42	0,98	2,05	7,86	2
2	2,07	3,71	0,86	2,35	7,67	2
3	1,51	4,33	0,68	2,96	6,53	2
4	1,92	3,90	0,79	2,53	7,48	2
5	2,27	3,46	0,97	2,09	7,85	2
6	2,45	3,23	1,09	1,85	7,91	2
7	2,52	3,15	1,14	1,76	7,93	2

Mientras  $d(q,c) \cdot d(q,c')$  no muestra, al parecer, información significativa, la columna de valores de  $d(q,f) \cdot d(q,f')$ , muestra una regularidad, a saber: en todos los casos da el mismo resultado. No sólo eso. Observando un poco más detenidamente se advertirá, incluso, que dicho valor coincide con  $d(f,o)^2$ , en nuestro ejemplo,  $(\sqrt{2})^2$ .

Pero, como veremos a continuación, no es imprescindible conocer esto último. La observación de la tabla sugiere la idea de que *la Lemniscata es el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos dados (focos), es siempre constante*<sup>5</sup>. Veamos si esta afirmación es verdadera.

En efecto, sean  $(f,0)$ ,  $(-f,0)$  las coordenadas de los puntos  $f$  y  $f'$  respectivamente, debemos probar la equivalencia entre

$$(x^2 + y^2)^2 = 2f^2(x^2 - y^2) \quad \text{y} \quad d(q,f) \cdot d(q,f') = n^2, \quad \text{con } n \text{ constante.}$$

Desarrollando la segunda expresión resulta

$$[(x-f)^2 + y^2] \cdot [(x+f)^2 + y^2] = n^4$$

O bien,

$$x^4 - 2x^2f^2 + 2x^2y^2 + 2f^2y^2 + y^4 + f^4 - n^4 = 0$$

Aplicando propiedad distributiva y completando cuadrados nos queda

$$(x^2 + y^2)^2 - 2f^2(x^2 - y^2) + f^4 - n^4 = 0$$

Que es la ecuación de la Lemniscata cuando  $f = n$ . Lo que nos indica que sólo bajo esta condición se cumple la equivalencia. (Es decir que, aún sin haber tenido la presunción de que el producto de las distancias de  $q$  a los focos era  $f^2$ , el sólo planteo algebraico del problema nos hubiese llevado a esa conclusión). Si  $f \neq n$  obtenemos una curva de Cassini.

Recíprocamente, haciendo  $f = n$ , podríamos volver a la ecuación inicial, esto es,  $d(q, f) \cdot d(q, f') = n^2$ , completando la prueba.

### III. 3. Construcción por puntos de una Lemniscata.

Hemos visto, en II. 2. y III. 1. dos maneras distintas de obtener una Lemniscata a partir de de una hipérbola equilátera. En este apartado, la construiremos con regla y compás, partiendo sólo de un segmento dado.

En efecto, tómesese la figura 6. Sea  $\overline{f'f}$  un segmento dado. (Alternativamente, si quiere, puede seleccionar los puntos  $f$  y  $f'$  y luego trazar el segmento que los une; tendrá, así, la libertad para cambiar su magnitud según desee y alterar, con ello, el tamaño final de la construcción). Sea  $o$  el punto medio de  $\overline{f'f}$  y  $M$  su mediatriz. Ubíquese, ahora, el punto  $o''$  sobre la recta  $M$  y trácese la circunferencia  $C''$  centrada en  $o''$  y que pasa por  $o$ .

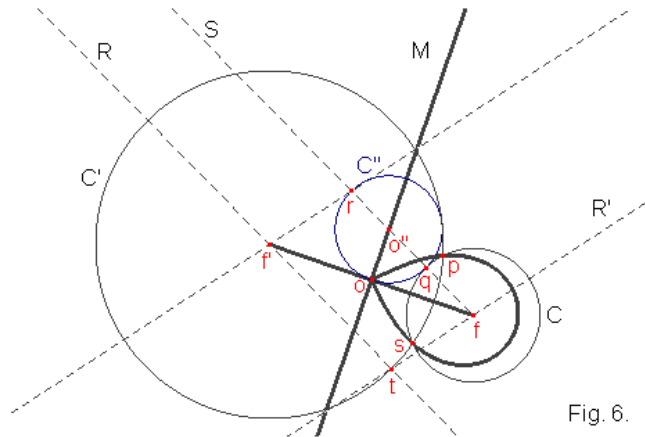


Fig. 6.

Sea, ahora,  $S$  la semirrecta secante a  $C''$  por los puntos  $q$  y  $r$ , cuyo origen está en  $f$  y pasa por  $o''$ . Sean  $R$  y  $R'$  las rectas paralelas a los segmentos  $\overline{rf}$  y  $\overline{rf'}$  respectivamente que se cortan en el punto  $t$ . Trácese, finalmente, las circunferencias  $C$ , de centro  $f$  y radio  $\overline{fq}$ , y  $C'$  de centro  $f'$  y radio  $\overline{f't}$ , secantes en los puntos  $s, p$ . Afirmamos que ambos pertenecen a la lemniscata de focos  $f, f'$ .

Para demostrarlo, observemos primeramente que, si  $o = o''$ , la circunferencia  $C''$  queda reducida a un punto, el punto  $o$ , haciendo que  $C$  y  $C'$  sean tangentes por él.

Luego,  $\overline{of} \cdot \overline{of'} = \overline{of}^2$ , y, trivialmente, se cumple que  $o$  pertenece a la Lemniscata mencionada.

Veamos, pues, qué ocurre cuando  $o \neq o''$ .

En este caso,  $R$  y  $R'$  se cortan en  $t$ . Es que, si no lo hicieran, serían paralelas. Y como estas, a su vez, son paralelas a los segmentos  $\overline{rf}$  y  $\overline{rf'}$  respectivamente, se sigue, por transitividad, que las rectas que contienen a  $\overline{rf}$  y  $\overline{rf'}$  serían paralelas entre sí. Luego, los puntos  $f$ ,  $r$  y  $f'$  estarían alineados, y la semirrecta  $S$  quedaría totalmente contenida en la recta determinada por ellos. Tendríamos, entonces, que  $S$  corta perpendicularmente a  $M$ , lo que la haría tangente a  $C''$ . Pero esto es absurdo, pues, suponemos que  $S$  es secante a  $C''$  por  $q$  y  $r$ .

Por otra parte, la condiciones para que  $C$  y  $C'$  sean secantes, pueden expresarse mediante las desigualdades

$$\overline{f't} + \overline{qf} > \overline{ff'} \quad \text{y} \quad \overline{ff'} > \overline{f't} - \overline{fq}$$

Para verificar la primera de ellas, observemos que

$$\overline{ff'} = 2 \cdot \overline{of} \quad (\text{por ser } o \text{ punto medio de } \overline{ff'}),$$

$$\overline{f't} \equiv \overline{rf} \quad (\text{pues son lados opuestos del paralelogramo de vértices } f', t, r, f), \text{ y}$$

$$\overline{ro''} = \overline{o''q} \quad (\text{ya que } r \text{ y } q \text{ pertenecen a } C'').$$

Además,

$$\overline{rf} = \overline{ro''} + \overline{o''f} \quad \text{y} \quad \overline{qf} = \overline{o''f} - \overline{o''q}$$

Sumando y reemplazando en lo anterior nos queda

$$\begin{aligned} \overline{rf} + \overline{qf} &= \overline{ro''} + \overline{o''f} + \overline{o''f} - \overline{o''q} \\ &= \overline{ro''} + 2 \cdot \overline{o''f} - \overline{ro''} = 2 \cdot \overline{o''f} \end{aligned}$$

Pero la longitud de  $\overline{o''f}$  es mayor que la de  $\overline{of}$ , puesto que  $\overline{o''f}$  es la hipotenusa del triángulo rectángulo  $\Delta ofo''$ . En consecuencia, se tiene que

$$\overline{rf} + \overline{qf} = 2 \cdot \overline{o''f} > 2 \cdot \overline{of}$$

De donde se sigue que

$$\overline{f't} + \overline{qf} > \overline{ff'}$$

Para verificar, ahora, bajo qué condiciones se cumple la segunda desigualdad, esto es,

$$\overline{ff'} > \overline{f't} - \overline{fq}$$

observemos que los puntos  $r$ ,  $q$  y  $o$  pertenecen a  $C''$ . Tenemos, entonces, que

$$\overline{f't} - \overline{fq} = \overline{rf} - \overline{qf} = \overline{ro''} + \overline{qo''} = 2 \cdot \overline{oo''}$$

y como 
$$\overline{ff'} = 2 \cdot \overline{of}$$

resulta que C y C' son secantes sólo cuando  $\overline{oo''} < \overline{of}$ . (Es decir, cuando la distancia que separa a o de o'' es mayor que la longitud de  $\overline{of}$ , las circunferencias C y C' dejan de ser secantes). Luego, existen los puntos p, s tales que

$$p, s \in C \cap C'$$

y podemos hacer, finalmente,

$$\overline{pf} \cdot \overline{pf'} = \overline{rf} \cdot \overline{qf} = \overline{fo}^2$$

cuando  $\overline{oo''} < \overline{of}$ , por ser  $\overline{fo}^2$  potencia del punto f respecto de la circunferencia C''. Reemplazando p por s, se obtiene, claramente, el mismo resultado. Por lo tanto, los puntos p, s, pertenecen a la Lemniscata de focos f, f' como pretendíamos demostrar.

**III. 4. descubriendo algunas otras propiedades de la Lemniscata.** En lo que sigue proponemos continuar el estudio de la Lemniscata con el mismo espíritu que en los apartados III.1 y III.2. Pero como no se trata de trabajar innecesariamente, observemos primero que al usar coordenadas polares, ese estudio se simplifica notablemente. Esto es, haciendo  $x = V \cdot \cos j$ ,  $y = V \cdot \sen j$ , la ecuación de la Lemniscata dada en II.1, se convierte en

$$V^2 = 2 \cdot c^2 \cos 2j$$

La longitud del radio vector V es la misma para los valores de j y j + p, lo que implica que la curva es simétrica respecto del origen. Además, adopta valores reales sólo cuando j está comprendida en el intervalo  $-p/4 \leq j \leq p/4$ . Es decir que las bisectrices de los ejes coordenados  $y = \pm x$  separan el plano en dos regiones; en una de ellas está totalmente contenida la Lemniscata. En tanto el ángulo j va tomando valores crecientes en el intervalo  $-p/4 \leq j \leq 0$  los valores de V son crecientes llegando al máximo cuando  $j = 0$ , y decrecen cuando j va de 0 a p/4. Estas consideraciones justifican la forma de la curva dada en la fig. 8; y es claro que, así como V llega al máximo cuando  $\varphi = 0$ , la coordenada y también lo hace, para un determinado valor de j. Lo que no resulta obvio, es cómo hallar el valor de j que cumple esa condición. Es lo que intentaremos hacer a continuación.

En la fig. 7 se da la Lemniscata L de focos f, f', de abscisas  $\sqrt{2}$  y  $-\sqrt{2}$ , respectivamente.

Sea R la recta de origen o y p un punto sobre ella. Sean q y q' los puntos de corte de R con L, cuando R está comprendida en la región donde existe la curva L

señalada en el párrafo anterior.

Sea, ahora,  $R'$  la paralela al eje  $X$  que pasa por  $q$ . Veamos, ahora, qué características tiene el punto  $q$  a medida que alteramos la inclinación de la recta  $R$ .

Con este propósito, en la tabla (b) se han registrado los distintos valores del ángulo  $j = \angle aop$ , las coordenadas  $x, y$  del punto  $q$  y la longitud del radio vector  $V$  que une  $o$  con  $q$ .

Se observa allí que, en tanto aumentamos el ángulo de inclinación de  $R$ , (partiendo de  $\angle aop=0$ ), va disminuyendo  $V$ , y  $x$ ; mientras que, por el contrario, la ordenada  $y$  incrementa su valor. La situación se revierte, al parecer, en la séptima fila, cuando  $\angle aop$  pasa los  $0,53$  radianes. Entonces, los valores de  $y$  comienzan a descender mientras que  $V$  y  $x$  siguen disminuyendo.

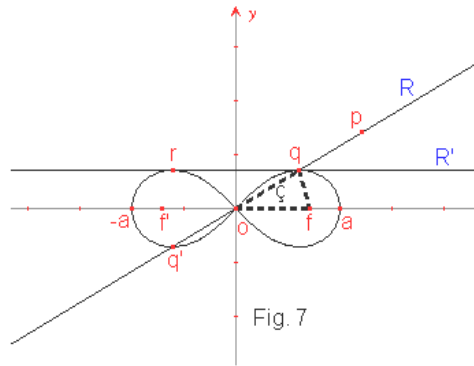


Fig. 7

Tabla (b)

	$\angle aop$	$\zeta$	$y$	$x$
1	0,13	1,97	0,25	1,95
2	0,18	1,93	0,35	1,90
3	0,23	1,89	0,43	1,85
4	0,31	1,80	0,56	1,71
5	0,38	1,70	0,63	1,58
6	0,49	1,50	0,70	1,32
7	0,53	1,41	0,71	1,22
8	0,62	1,14	0,66	0,92
9	0,76	0,39	0,27	0,28
10	0,79	-----	-----	-----

El comportamiento reflejado en la tabla (b) parecería estar indicando que la coordenada  $y$  del punto  $q$ , adopta su máximo valor cuando  $j$  es igual a  $0,53$  radianes. Pero no sabemos, primero, qué tan preciso es éste número, y, peor aún, cuanto se han manifestado en él los errores de medición en la construcción de  $L$ . Nuevamente, pues, debemos apelar a la prueba analítica.

Obsérvese primero que, en términos de  $p$ , se tiene  $0,53 \text{ rad} \cong p/6$ . Ahora, aplicando Pitágoras, resulta

$$y^2 = V^2 - x^2$$

o, lo que es lo mismo,

$$y^2 = 2c^2 \cos 2j - V^2 \cos^2 j$$

o bien, reemplazando nuevamente  $V^2$  por su expresión anterior, queda

$$y^2 = 2c^2 \cos 2j \cdot (1 - \cos^2 j)$$

derivando  $y^2$  respecto a  $j$  obtenemos

$$\frac{dy^2}{dj} = 4c^2 (-\operatorname{sen} 2j \cdot \operatorname{sen}^2 j + \cos 2j \cdot \operatorname{sen} j \cdot \cos j),$$

cuyo valor se hace cero para  $j = p/6$ . Luego,  $dy/dj$  se hace igual a cero también en este valor, con lo que se prueba que, dada una Lemniscata  $L$  de focos  $f, f'$ , centro  $o$ , y un punto  $q(x, y)$  sobre ella, la coordenada  $y$  alcanza su máximo valor cuando el ángulo  $\angle foq$  es igual a  $p/6$ .

Hay que llamar la atención en el hecho que la tabla (b) no deja de arrojar relaciones interesantes entre las variables. Nuevamente, en la séptima fila, el valor correspondiente a  $V$  para el ángulo  $j = 0,53 \text{ rad}$ , es de  $1,41 \text{ cm}$ . Es decir que coincide con la distancia de los focos al origen. Comprobemos que esto es siempre verdadero.

En efecto, cuando  $j = p/6$ , se tiene que

$$V^2 = 2c^2 \cos(p/3) = 2c^2 \cdot (1/2) = c^2,$$

lo que implica que  $V = c$ . Es decir, cuando la coordenada  $y$  del punto  $q$  adopta su máximo valor, queda determinado un triángulo isósceles con los puntos  $o, q$  y uno de sus focos (en nuestro ejemplo, el foco  $f$ ), tal que  $\overline{of} \equiv \overline{oq}$ , y  $\angle foq = p/6$ .

### III. 5. Ejercicios propuestos.

(a) En la tabla (b), advierta la siguiente relación. En la séptima columna, los valores de  $x$  e  $y$  son  $0,71$  y  $1,22$ , respectivamente.

Ahora,  $x \cdot y = 1$ . ¿Será cierto que, dada cualquier Lemniscata, cuando  $y$  alcanza su máximo valor posible, se cumple que  $x \cdot y = c^2/2$ ?

(b) Con la notación del apartado anterior, si  $R''$  es la normal a  $R'$  que pasa por  $q$ ; y  $r$  es el punto de corte de  $R''$  con el eje  $X$ , se formarán los siguientes ángulos:

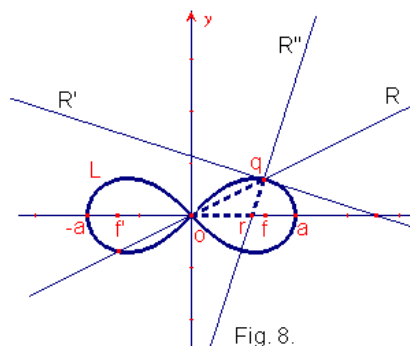


Fig. 8.

$\angle roq = p/6$ ;  $\angle oqr = p/3$ ; y  $\angle qro = p/2$ . (Fig.8).

Intento de generalización: ¿será verdad que, dado cualquier punto  $q$  sobre L, con  $R'$  y  $R''$ , tangente y normal, respectivamente a L por el punto  $q$ , se cumple que  $\angle roq = a$ ;  $\angle oqr = 2a$ ;  $\angle qro = p - 3a$ ?

(c) Analice la construcción que se muestra a continuación. Demuestre si se trata, o no, de una Lemniscata.

Sea  $\overline{ab}$ , un segmento dado. Sea C la circunferencia de centro  $b$  y radio  $\overline{ab}$ . Colóquese un punto  $p$  arbitrario sobre C. Trácese, ahora, la semirrecta

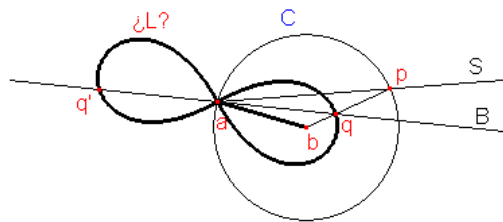


Fig. 9.

S, de origen  $a$  que pasa por  $p$ . Sea, ahora, B la bisectriz del ángulo  $\angle bap$ . Esta bisectriz B, corta al segmento  $\overline{bp}$  en un punto, llamémoslo  $q$ . Se afirma que  $q$  pertenece a la Lemniscata con centro en  $a$ , y  $f$  como uno de sus focos. Seleccione la opción *lugar geométrico* que describe  $q$  cuando se “mueve”  $p$  sobre la circunferencia C. Obtenemos la curva que se muestra en la figura 9.

Suponiendo que la construcción es correcta, ¿pueden hallarse *todos* los puntos de la Lemniscata con tal procedimiento?

(d) Analice la construcción que se muestra a continuación. Demuestre si se trata, o no, de una Lemniscata.

Tómese un segmento  $\overline{ab}$  sobre la recta R, y trácese la circunferencia C de centro  $a$  y radio  $\overline{ab}$ . Sea  $o$  un punto perteneciente a R tal que  $d(a,o) = \sqrt{2} \cdot d(a,b)$ . Colóquese, ahora, un punto  $p$  arbitrario sobre la circunferencia C, y trácese la semirrecta S con origen en  $o$  que pasa por  $p$ . Si S es secante a C, existe otro punto, además de  $p$ , llamémoslo  $r$ , tal que

$$r \in S \cap C$$

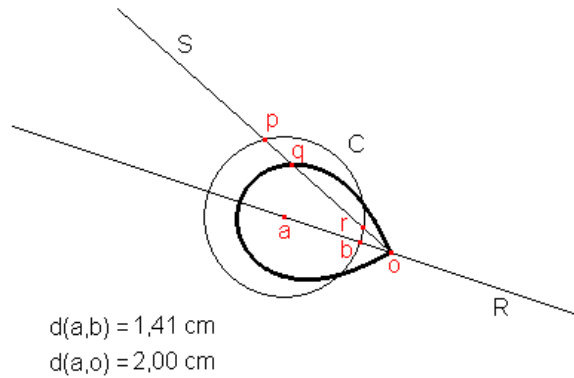


Fig. 10.

Sea  $q$  un punto sobre la semirrecta  $S$  tal que  $\overline{oq} \equiv \overline{rp}$ . Seleccione, finalmente, la opción *lugar geométrico*, para describir el recorrido del punto  $q$  cuando  $p$  se mueve sobre  $C$ . Se afirma que el lugar obtenido es uno de los “bucles” de la Lemniscata de centro  $o$  y  $a$  como uno de sus focos. (figura 10).

Demostrar si esta afirmación es verdadera o falsa.

Preguntas: ¿Qué pasa cuando  $S$  es tangente a  $C$ ?  
 ¿Pueden obtenerse todos los puntos de  $L$  mediante este procedimiento?

#### IV. Cisoide y Estrofoide

##### IV.1. Construcción por puntos de la Cisoide de Diocles.

Sea  $\overline{ab}$  un segmento dado, y  $m$  su punto medio. Sea  $C$  la circunferencia de centro  $m$  y radio  $\overline{am}$ . Sea  $R$  la perpendicular al segmento  $\overline{ab}$  que pasa por  $b$ , y colóquese un punto  $p$  arbitrario sobre  $R$ . Trácese, ahora, la semirrecta  $S$  cuyo origen es  $a$  y pasa por  $p$ .  $S$  corta a  $C$  en el punto  $r$ . Tómesese, ahora, un punto  $q$  sobre  $S$  tal que  $\overline{oq} \equiv \overline{rp}$ . Finalmente, seleccione el *lugar geométrico* que describe  $q$  cuando  $p$  se mueve sobre  $R$ . Se afirma que ese lugar es una Cisoide de Diocles.

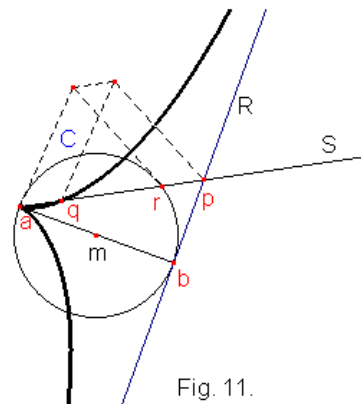


Fig. 11.



En efecto, consideremos el círculo de diámetro  $\overline{ab} = 2k$ . Observando la figura 11, podemos expresar,

$$\overline{ap} = \overline{ab} / \cos j \quad \overline{ar} = \overline{ab} \cdot \cos j, \text{ donde } j = \angle bap.$$

En consecuencia,

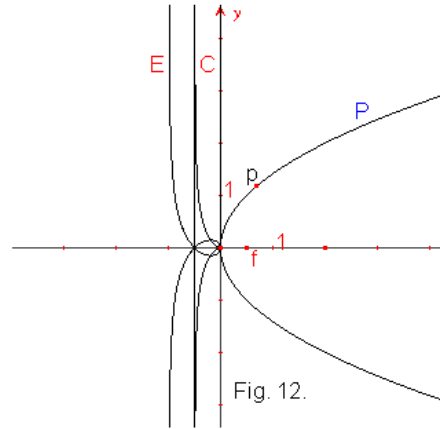
$$\overline{aq} = \overline{ap} - \overline{ar} = 2k \cdot \sin^2 j /$$

$$\cos j \cdot \sin j \cdot \operatorname{tg} j$$

que es la expresión polar de la Cisoide de Diocles equivalente a la dada en II. 2. en su forma cartesiana.

**IV. 2. Podarias de una Parábola.** Se puede construir por puntos una estrofoide con regla y compás de un modo parecido al que se construyó la Cisoide en el apartado anterior. Otra forma de obtenerla es como la podaria respecto al punto de corte de la directriz de una parábola cuando esta se encuentra en posición estándar. Si, en cambio, tomamos la Podaria respecto del origen, obtenemos una Cisoide. La manera de probar esto es análoga

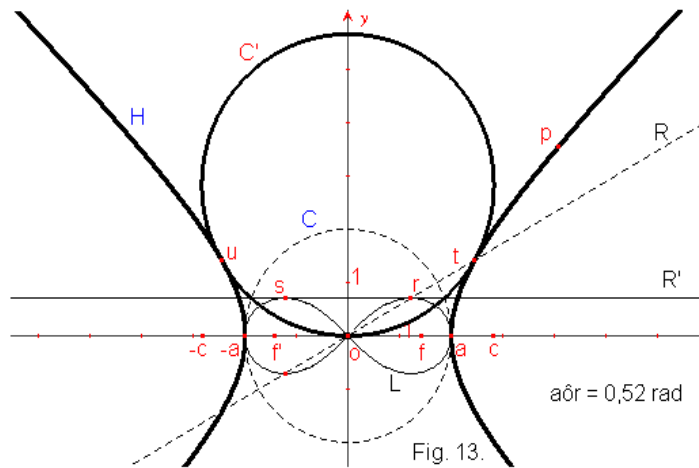
a la vista en III.1. para el caso de la hipérbola equilátera. En la figura 12 se han graficado las podarias de la parábola P de foco  $f = (1/2, 0)$  respecto de ambos puntos obteniendo la estrofoide E y la Cisoide C, respectivamente. Las podarias e inversas relacionan las cónicas de muchas maneras; y una buena forma de verificar esto es construirlas y luego hallar estos lugares geométricos. En este trabajo hemos tenido en cuenta sólo algunas y, por supuesto, tal selección no está exenta de arbitrariedades.



### V. Ejercicios

(a). Dada una hipérbola equilátera, hallar una circunferencia que pase por su centro y, además, sea "tangente" a ambas ramas de la misma.

*Resp. (esbozo de solución):* Sin perder generalidad, tomemos nuevamente la hipérbola equilátera  $H \quad x^2 - y^2 = 4$ ; y coloquemos el punto  $p$  sobre ella.



Tomemos el inverso de  $p$  respecto de la circunferencia principal  $C$ , y seleccionemos el lugar geométrico que describe ese punto; obtenemos, así, la Lemniscata  $L$ , como vimos anteriormente. Sea, ahora,  $R$  la recta que pasa por el origen  $o$  y tiene un ángulo de inclinación de  $p/6$  radianes. Entonces,  $R$  corta a  $L$  en el punto  $r$ . Y la recta  $R'$ , paralela al eje  $X$  que pasa por  $r$  es “tangente” a ambos “bucles” de la Lemniscata en los puntos  $r$  y  $s$ . (Para comprobar que  $R'$  también pasa por el punto  $s$  de  $L$  basta observar que  $L$  es simétrica respecto del eje  $Y$ ). Aplicando nuevamente la inversión respecto de  $C$ , tenemos que la imagen de  $L$  retorna a la hipérbola  $H$  inicial, en tanto que la imagen de  $R'$  es una circunferencia  $C'$ , “tangente” a  $H$  por los puntos  $t, u$ , donde  $t, u$  son los inversos de  $r, s$  respectivamente. Además,  $C'$  pasa por  $o$  puesto que  $R'$  no pasaba por el origen. Hemos obtenido, así, la circunferencia que buscábamos. (Véase figura 13).

(b) Demuestre que una estrofoide y una circunferencia se intersecan en a lo sumo cuatro puntos.

*Resp (esbozo de solución):* Tenemos un par de ecuaciones del tipo:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad , \quad y^2 = x^2 \cdot \frac{(a+x)}{(a-x)}$$

que son las ecuaciones de una circunferencia y una estrofoide, respectivamente.

Aplicando una inversión apropiada, la estrofoide se transforma en una hipérbola equilátera, en tanto que la circunferencia se convierte en otra circunferencia, o bien, en una recta.

En el primer caso, nos quedan las curvas

$$(x-h')^2 + (y-k')^2 = r'^2 \quad , \quad x^2 - y^2 = a'$$

que se intersecan en a lo sumo cuatro puntos según el teorema fundamental de las cónicas. Tomando la inversión de estos puntos, obtenemos las intersecciones de la estrofoide con la circunferencia inicial.

Si, en cambio, la inversión circular de  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$  es una recta en lugar de otra circunferencia, existen, entonces, no más de dos puntos de corte de esta recta con la hipérbola  $x^2 - y^2 = a'$ . Luego, aplicando la inversión de estos puntos obtenemos las intersecciones de la estrofoide con la circunferencia inicial.

#### Notas.

<sup>1</sup> Véase Rey Pastor, Geometría Analítica, pag. 311.

<sup>2</sup> Suele atribuirse a Steiner (1824) la invención de esta transformación; Thompson, al parecer, llegó también a ella independientemente por consideraciones físicas. Entre sus aplicaciones se encuentran los conocidos problemas de Apolonio. Mascheroni (1750-1800) la usó para demostrar que toda construcción con regla y compás puede resolverse usando solamente el compás.

<sup>3</sup> Se podría continuar este análisis y demostrar, por ejemplo, que la inversa de una hipérbola no equilátera o una elipse dan curvas de Cassini, cuando el polo de inversión coincide con su centro; o bien, que la inversa de cualquier cónica es un caracol de Pascal cuando el polo de la inversión está sobre uno de sus focos, etc. Sin embargo, para el estudio que nosotros nos proponemos a continuación, basta con lo que acabamos de exponer hasta aquí.

<sup>4</sup> Véase Rey Pastor, *Geometría Analítica*, pag. 100.

<sup>5</sup> Es claro que, en verdad, al confeccionar una tabla nos encontramos con una cantidad de datos superfluos mucho mayor a la que mostramos en nuestro ejemplo. Sólo por economía de espacio se han tomado únicamente dos columnas, pero es de esperar que el hallazgo de alguna regularidad suponga un trabajo mucho más arduo del que aquí se muestra.

<sup>6</sup> Véase en Bell, E.T. *Historia de las matemáticas*, pag. 348 y siguientes.

### **Referencias**

- [1] Bell, E. T.; *Historia de las matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, 1945
- [2] Courant, Richard y Robbins, H; *¿Qué es la matemática?*, Aguilar, Madrid - 1958
- [3] Rey Pastor, J. *Geometría Analítica*, Ed. Kapelusz. Bs. As.
- [4] Rey Pastor, J. *Análisis Matemático*, Ed. Kapelusz, Bs. As. 1959.

(\*) Alumno del Profesorado de Matemática.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.