Recorriendo grafos a lo largo de la Educación General Básica

Autores: Raquel María Cognigni - Teresa Braicovich – Claudia Reyes.

Institución: Universidad Nacional del Comahue

Correo electrónico: teresabraicovich@jetband.com.ar - rcognigni@infovia.com.ar-reyesclaudiag@speedy.com.ar

Área de Investigación: Nivel Inicial, EGB 1, EGB 2, EGB 3.

I) Introducción

La matemática es una ciencia, fruto del espíritu creativo del hombre. Cuando una idea empieza a emerger se discurre por varios caminos diferentes, a veces desordenados, a veces con retrocesos, a veces sin lógica precisa, hasta que dichas ideas van tomando forma y a la larga pueden constituir toda una teoría. Esta es la forma de trabajar del investigador, del que "*hace*" matemática, del que "*crea*"; a diferencia de la situación que muchas veces se da en las aulas donde el conocimiento suele presentarse acabado, jerarquizado, sin dar la posibilidad de hacer preguntas, ya que fueron presentadas todas las respuestas.

Hay muchas dificultades que pueden ser observadas en los estudiantes de todos los niveles educativos: les resulta difícil proponer razonamientos propios y además en muchas ocasiones no logran resolver sencillos problemas que pueden presentarse en la vida cotidiana y que tienen relación con la matemática. Probablemente, esta situación esté relacionada con un modelo cultural que busca reproducir el conocimiento más que producirlo, podemos tomar las palabras de Moisés Coriat: "*No es tan importante saber muchas cosas como saber cómo aprender cosas nuevas*". Esto es algo que tiene que ver con actitudes, expectativas y vivencias, lo que algunos autores coinciden en llamar "*currículo oculto*" y se trata de aquello que los alumnos aprenden más allá de la intencionalidad del docente o de lo que metodológicamente se ha planteado en forma explícita. Es en el currículo oculto donde, posiblemente, se halle la razón de que una gran cantidad de alumnos de tantas generaciones hayan sido acostumbrados a recibir el conocimiento y a interpretar que lo importante no es el proceso de razonamiento y búsqueda, sino el de lograr reproducir lo que el profesor desea escuchar.

Otra problemática muy conocida por todos, que creemos, también es de índole cultural, es sortear el prejuicio ya instalado que la matemática es "*difícil*" y además “*no puede gustar*”; esto obstaculiza la motivación, algo tan importante, que podría ser el propio motor de los aprendizajes.

Una posible respuesta a la problemática anteriormente planteada, estaría dada por la idea de generar el aula taller, donde el alumno tenga la posibilidad de explorar, intentar caminos, hacer preguntas, generar hipótesis y conjeturas. Es muy probable que con los contenidos clásicos nos costaría mucho pensar en esta metodología, pues en nuestra mente ya se ha estructurado el conocimiento en un orden preestablecido, el que no nos resultaría sencillo romper.

En este sentido, creemos que los grafos constituyen una buena herramienta para conceptualizar situaciones, para extraer pautas y entender esquemas y lograr transferirlos a situaciones nuevas. Como no hay necesidad de ser un experto en el tema para usarlos con cierta soltura, vemos que el introducir algunos conceptos de grafos resulta útil para despertar el interés por la matemática, para ayudar al desarrollo lógico y a la visión espacial, también actúa como formador de la intuición y sostén del razonamiento abstracto. Podemos citar nuevamente a Coriat: “*Por medio de los grafos se facilita el acceso de los alumnos a sus propias estrategias de aprendizaje, no porque estas se describan necesariamente mediante grafos, sino porque el ir y venir entre situaciones y estructuras puede facilitar la toma de conciencia de los propios procesos metacognitivos*”.

Tenemos la suerte que todo lo que tiene que ver con grafos, no lo hemos aprendido en nuestra etapa de escolaridad, sino en una etapa de autodidaxis y sin un orden impuesto. De ahí surgió la idea de generar talleres para docentes y para alumnos, donde se estudien estos temas de manera diferente, con toda la libertad y la diversidad de caminos que esta metodología permite. Y pudimos hacerlo, y pudimos jugar y divertirnos, explorar y equivocarnos. Pudimos dar la oportunidad a los chicos de convertirse en verdaderos investigadores y generadores de conocimientos. Por eso, nuestra propuesta es, generar un espacio creativo en las aulas y/o en horarios extraescolares, aprovechando estos temas, los que pudimos comprobar resultan atractivos y no por eso menos formativos del pensamiento matemático.

II) Análisis de currículas de distintos niveles

A partir de la observación de textos de EGB propuestos por distintas editoriales para los tres ciclos, como así también de distintos programas de la asignatura Matemática de las provincias de Río Negro y Neuquén, vemos que el tema Grafos "*brilla por su ausencia*", usando un dicho popular. Pero también, pudimos ver que textos españoles como los de Colera y Guzmán, que son muy ricos y variados en propuestas estimuladoras y entretenidas, eluden el tema. Esto nos hace pensar, que no se puede enseñar lo que no se conoce, pero sobre todas las cosas, creemos que hay una tendencia general al arraigo a ciertos contenidos, por tradición y también por hábitos culturales, que hace que algunos sean más importantes que otros. Tampoco desconocemos el hecho que la resistencia al cambio es característica de la gran mayoría de seres humanos.

Las necesidades de conocimientos matemáticos son diferentes a las de hace tres décadas y los medios para la enseñanza y aprendizaje también. Hoy es necesario un conocimiento que permita aplicar matemática a diversas situaciones, valorando significativamente la capacidad para realizar aplicaciones con flexibilidad y espíritu crítico. Los docentes deberíamos poner a los estudiantes frente a situaciones, problemas, en las que sea necesaria la búsqueda autónoma, el propio descubrimiento paulatino de estructuras sencillas, de regularidades, la generación de hipótesis, la verificación de propiedades, etc. Esto debe ser llevado a cabo en base a actividades que tengan como punto de partida problemas, cuyo análisis individual y grupal posibilite un enriquecimiento progresivo en la forma de plantearse la actividad docente. Las mismas deben tener un enfoque investigador, que facilite la formación de criterios propios para abordar los problemas en forma creativa y los enfoques didácticos se deberán presentar utilizando los mismos procedimientos de intervención pedagógica que se pretende que los maestros utilicen con sus alumnos.

III) Un poco de historia….. ¿Con qué ramas de la matemática se relaciona la Teoría de Grafos?

La Teoría de Grafos, a diferencia de otras teorías, tiene un comienzo bien definido como disciplina autónoma, el mismo se considera en el año 1936 cuando König publicó el libro: "*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*" (Leipzig y reimpreso por Chelsea, Nueva York, 1950). König reunió resultados que habían sido obtenidos en trabajos anteriores y que parecían no estar conectados entre sí en un todo orgánico, estos estaban relacionados con diagramas moleculares, redes eléctricas, recorridos eulerianos y hamiltonianos y también con planaridad y coloreo. Anteriormente, en el año 1922, el tema grafos había sido tomado como parte de la topología combinatoria por Veblen.

El primer artículo en orden cronológico, de los resueltos con métodos actualmente incluidos en el estudio de grafos fue escrito por Leonhard Euler (1707-1783). El mismo fue publicado en las Actas de la Academia de San Petersburgo en 1736 y resuelve, por la negativa, el problema denominado "*Los puentes de la ciudad de Königsberg*". No podemos dejar de mencionar que es una memoria que se considera una de las piedras angulares de la topología, a pesar de que existen trabajos anteriores a esa fecha. Descartes en 1640 y Euler en 1742 encontraron una relación entre la cantidad de vértices (V), aristas (A) y caras (C) de un poliedro simple. La famosa fórmula: V+C=A+2, la que también es utilizada para grafos, considerando regiones en lugar de caras.

Camile Jordan (1838-1922) enunció uno de los primeros teoremas fundamentales de la topología: "*toda curva cerrada que no se cruza a si misma divide al plano exactamente en dos regiones, una interior y una exterior*", concepto ampliamente utilizado para determinar la planaridad de los grafos, por ejemplo. La coloración de mapas es otro problema de la topología, parece que uno de los primeros matemáticos que lo propuso fue Möbius en 1840, más tarde De Morgan en 1850, y después Cayley en 1878. En 1890, Kempe propuso una demostración de que cuatro colores eran suficientes para colorear cualquier mapa plano, pero luego se descubrió que la prueba no era correcta. Recién en 1976 dos matemáticos de la Universidad de Illinois, Appel y Haken, demostraron ayudados por computadora que, efectivamente, cuatro colores es suficiente.

La Teoría de Grafos es hoy un campo muy abierto de investigación, y se puede prever que seguirá siéndolo durante mucho tiempo. Los grafos han llegado a ser una herramienta muy importante para disciplinas tales como la Investigación operativa, la lingüística, la química, la genética, el arte o el Psicoanálisis, al mismo tiempo que una disciplina con desarrollo y aportaciones propias.

Hasta aquí hemos presentado una sucinta mención a la historia, ahora relacionaremos el tema grafos con la enseñanza.

El espacio es el ámbito natural donde se desarrolla la fenomenología geométrica. De ahí que cuando entramos en el terreno de lo pedagógico, el primer emergente sea preguntarse cómo construye el niño su noción de espacio. Este punto se trata a partir de la convicción que en el proceso de desarrollo del pensamiento de los chicos, el primer período es esencialmente topológico (y no métrico). A partir de estas características se construye la noción de espacio, tan importante para su desarrollo integral y su incorporación al mundo tridimensional en el que estamos insertos.

Una prueba eficaz de su pensamiento de índole topológico, es que para el niño de 2 a 4 años toda línea cerrada describe una casa y toda línea abierta describe un camino. Esto tiene que ver también con la abstracción que hace de las formas de los objetos, descartando los detalles.

Recién a los 5 años puede diferenciar un círculo de un cuadrado y de un triángulo. Pero no pierde el gusto por lo topológico, ya que en la figura humana, los dedos pueden tener el tamaño de la cabeza, (descarta totalmente la métrica), pero lo que importa es que estos penden de la mano, rescatando así la propiedad de proximidad. Además, pudimos observar, que a los 5 años, les encanta unir con caminos un conjunto de casa dispersas en una hoja, con la consigna de pasar solamente una vez por cada casa, construyendo de esa forma grafos recorribles en el sentido hamiltoniano.

Desde los 6 años y hasta los 12 ó 14, se entretienen en gran medida analizando recorridos eulerianos, pintando mapas, inventando grafos "*difíciles*" desafiando a los compañeros con mapas "*complicados para que no les alcance con 4 colores*", entre otras cosas.

De estas experiencias, nos queda la inquietud a modo de pregunta, o casi de certeza, que el tema grafos y otros temas de la topología o de la matemática discreta, pueden ser perfectamente tratados en el nivel inicial y en la Educación General Básica a modo de incentivo y acercamiento a la matemática, desde una perspectiva distinta, la del juego y el disfrute, más que la de la obligación.

Cuando planteamos el desarrollo evolutivo del niño pequeño, y decimos que en sus primeras etapas el pensamiento es topológico, estamos tomando de esta ciencia las herramientas para trabajar esencialmente con grafos, o con otros conceptos desarrollados en esta rama de la matemática. Cuando avanzamos en nuestro estudio y nuestros niños "*crecen*", debemos recurrir a las estrategias de razonamiento de la matemática discreta, para fortalecer los conocimientos y comenzar a formalizar nociones y propiedades. Desafortunadamente, no podemos definir fácilmente la Matemática Discreta, podemos sí decir que trabaja con conjuntos finitos de objetos, lo que incluye tópicos y técnicas de cada día de la vida, esta rama de la matemática se desarrolló rápidamente adquiriendo gran importancia durante las últimas cuatro décadas y es utilizada para la toma de decisiones en nuestra sociedad. Podemos presentar algunas preguntas relacionadas con esta rama de la matemática: ¿Cuál o cuáles son las listas posibles?, ¿Cuál es la mejor manera de ganar la lotería?,¿Cuál es la manera de recorrer todas las cabinas telefónicas minimizando esfuerzos?, ¿Cuál es la cantidad de recorridos posibles para cubrir determinados caminos?, etc. Por último es importante destacar que el acento actual en los algoritmos discretos, así como la modelización de diversos fenómenos mediante el uso de computadoras, ha dado lugar a un traslado de énfasis hacia la matemática discreta.

IV) ¿Por qué abordar estos temas en Nivel Inicial y en EGB?

Nos propusimos trabajar algunos conceptos de grafos con niños de estas edades, esto con la convicción de que, en este pasaje "*de lo instructivo a lo formativo*" en la concepción de la Enseñanza de la Matemática, pueden ser variadas las formas de favorecer el desarrollo y la adquisición de competencias, y todas ellas igualmente válidas. Además, que las distintas maneras de fortalecer el desarrollo de capacidades nada tiene que ver con la memorización de reglas, postulados, etc. Los valores formativos también están relacionados con aquello que despierta el interés y el deseo de aprender. Podemos resumir, diciendo que nuestras hipótesis iniciales eran que el trabajo con grafos es sumamente rico en contenidos transferibles al aula en los primeros niveles; que permite la adquisición de actitudes favorables al trabajo matemático, que conducen a la valoración de la matemática como una herramienta útil y también que es posible generar situaciones que interesen a los alumnos.

Con respecto a nuestras expectativas, podemos decir que queríamos encontrar un camino atractivo para desarrollar en los chicos competencias básicas y esperables en su transcurrir por el sistema de enseñanza, aprovechar el gusto por el juego que tienen los niños con el fin de acercarlos a nuevos conceptos matemáticos y a razonamientos independientes, propios, dinámicos, creativos, que les permita comprender y usar la matemática con propiedad.

V) Verificando nuestras hipótesis….las experiencias.

Con el fin de realizar este análisis se llevaron a cabo muchas experiencias, en algunos casos se trabajo con grupos pequeños en talleres de horario extraescolar, en otros casos con aulas completas y también en varias ocasiones se llevaron a cabo de manera individual. El trabajo fue realizado con alumnos que concurren a establecimientos educacionales públicos de distintos contextos sociales, escuelas de radio céntrico, de radio periférico, rurales y también públicas de gestión privada. Es importante destacar que en todos los casos se trabajó en el marco de la resolución de problemas por ser esta una forma privilegiada para lograr un aprendizaje significativo.

Además del trabajo con los niños, se dictaron cursos y talleres para docentes en ejercicio de la profesión y para estudiantes del profesorado de matemática, algunos de ellos tuvieron evaluación y otros no.

Durante el desarrollo de estas experiencias nuestras primeras hipótesis se fueron confirmando en gran medida, ya que a través de las actividades notamos que los niños se sintieron actores y no sólo espectadores, pudimos comprobar que las propuestas estimularon el deseo de seguir y realizar nuevas preguntas. Por supuesto acompañamos a los chicos durante el proceso de construcción, orientando y ofreciendo material complementario. Tuvimos la gran satisfacción de ver a los niños trabajar con la metodología de controlar y modificar hipótesis, con conjeturas y contraejemplos, cada vez que decían frases como las que transcribimos a continuación: "*creo que es cierto….o si recorro este camino, entonces ocurrirá….*", "*yo pensaba que esto me iba a dar…..pero no puede ser….en este caso no me dio…..*", "*si cambio estas aristas de lugar, encuentro el recorrido…¿por qué*?", etc.

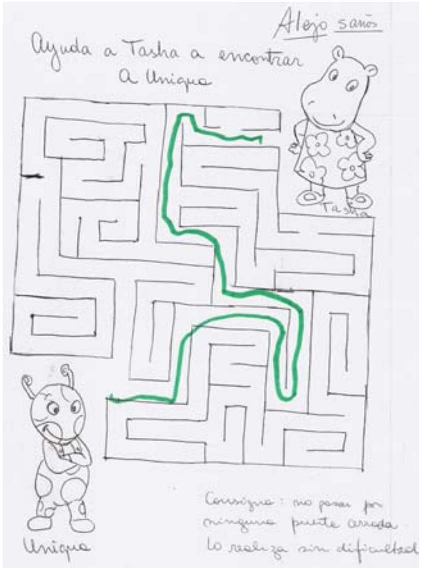
La evaluación de esta investigación, que es de tipo cualitativa se realizó, por un lado, a partir del trabajo desarrollado por los alumnos, el que fue minuciosamente analizado. Por otro lado, con el fin de evaluar las experiencias se realizaron encuestas abiertas, encuestas cerradas y entrevistas a los distintos actores, tanto a los alumnos como a los docentes, en el primer caso con el fin de obtener su opinión sobre el tema y en el segundo con la intención de saber si los docentes consideraban que el tema era accesible para ser dado a los alumnos y si les parecía pertinente incluirlo en las currículas correspondientes

Los temas con los cuáles se trabajó en las distintas experiencias son recorridos eulerianos y hamiltonianos, lema del apretón de manos, grafos planares, coloreo de grafos, grafos bipartitos, grafos completos, grafos valuados, árboles y árboles cubrientes maximales y minimales.

A modo de ejemplo presentaremos la graducación de dos de los temas presentados, a saber: caminos y coloreo.

- <u>Caminos</u>

Con respecto al <u>nivel inicial</u>, nuestra experiencia nos muestra que todo tipo de laberintos donde los caminos se encuentran representados por dos líneas paralelas, por complejo que sea, los resuelven sin dificultad, identificando claramente cuando no se puede avanzar al encontrar la línea que lo atraviesa.

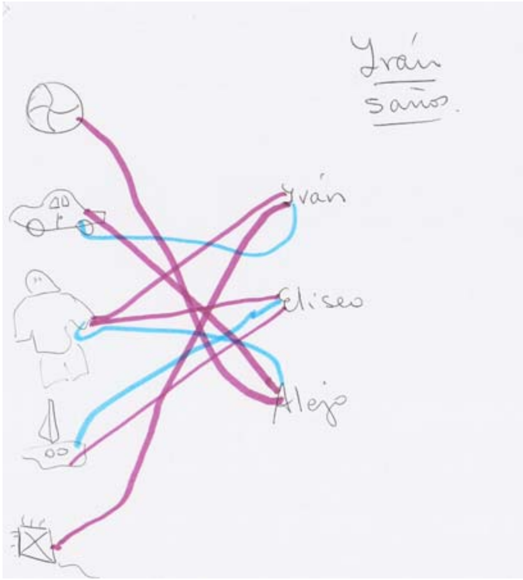


En cambio, en los grafos, donde las aristas son una abstracción del camino y no hay “puertas” que se cierran, sino que hay que optar por distintas rutas, siempre tienden a elegir el camino más directo, debido a la lógica práctica de la edad. Ante nuestra insistencia de buscar otras posibilidades que lo lleven al mismo lugar, responden “ya está”, “ya llegué” y no intentan buscar otro.

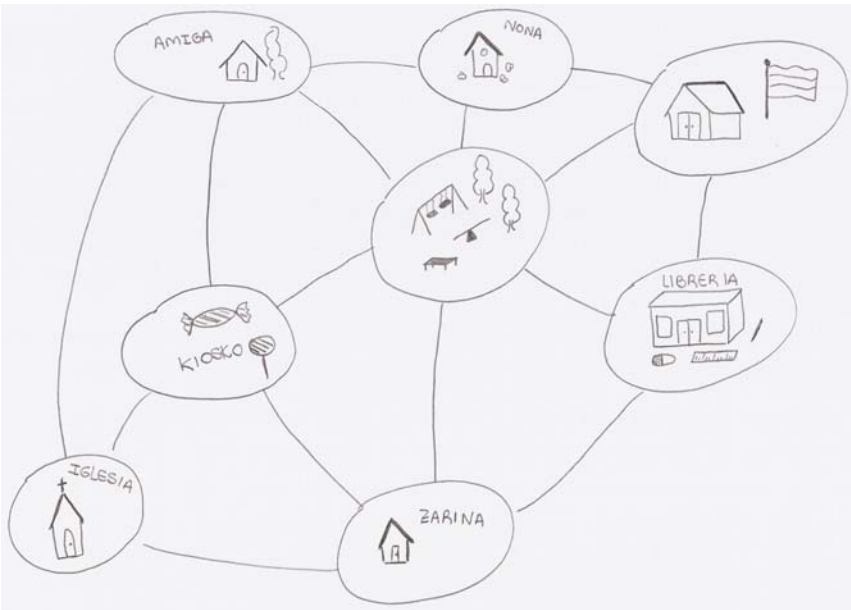
Siguiendo en esta temática pudimos comprobar que ante un grafo sencillo y las consignas de pasar por todos los caminos una única vez y no levantar el lápiz, se ve claramente que responden solo a una sin tener en cuenta la otra. En algunos casos recorrieron todas las aristas pero “levantaron el lápiz” y en otros “no levantaron el lápiz” pero dejaron alguna o algunas arista sin recorrer.

Les dimos en una hoja casitas numeradas del 1 al 10, no tuvieron dificultad en unirlas ordenadamente mediante un camino. Al pedirles que no se crucen los mismos, en general, no lo lograron; se vuelve a ver que consideran una consiga a la vez. Nuevamente, pudimos notar que se encuentran satisfechos al cumplir el objetivo, sin percibir si transgredieron alguna regla.

También quisimos ver si podían construir grafos bipartitos y lo lograron sin dificultad. Se les presentaron juguetes a la izquierda y nombres de amigos a la derecha, con la consigna de que cada nene use dos, tres, cuatro juguetes. Ellos cuentan las aristas y “otorgan” la cantidad de juguetes indicada, contradiciendo nuestra hipótesis de que hubieran podido decir que no les alcanzaban los juguetes. Se muestra a continuación el grafo realizado por uno de los niños:



En el primer ciclo, ya en primer grado pueden realizar recorridos con ciertas condiciones. Se les presentó el siguiente grafo:



En un primer momento se les pidió que encuentren caminos entre determinados lugares y lo lograron hacer. Luego se le dieron algunas condiciones, por ejemplo: "*Ir de la casa de Zarina a la escuela sin pasar por la plaza*" o "*Ir desde la escuela a la casa de la amiga pasando (obligatoriamente) por la librería*". Pudimos comprobar que a esta edad pueden hallarlos atendiendo a todas las condiciones dadas, incluso los caminos relativamente complejos. Además, pudieron encontrar caminos que pasen por todos los lugares, en algunos casos los encontraron sin buscarlos y se dieron cuenta después de haberlo indicado y en otros casos lo encontraron cuando se les pidió.

También pudimos observar que cuando comparan entre ellos lo hallado, cuentan la cantidad de caminos, pero no encuentran todavía una manera de individualizarlos y comparar uno a uno, lo que sí se logra en grados superiores de este mismo ciclo.

Cuando se les pide que encuentren todos los caminos con la misma cantidad de tramos en grafos no valuados, buscan y presentan distintas posibilidades, aún cuando no logren hallar todas. Es importante mencionar que al presentárseles grafos valuados a niños de este ciclo y pedirles que hallen el camino más corto entre dos lugares dados, en un primer momento lo hacen contando el número de aristas recorridas, lo que muestra aún un fuerte acento "topológico" en su pensamiento, ya que no les preocupa la longitud de las aristas. Se les aclara nuevamente que deben atender a la cantidad de cuadras indicada en los distintos caminos, se demoran un poco pero finalmente lo encuentran, haciéndolo siempre por ensayo y error.

Ya en el segundo ciclo se nota un cambio importante frente a las mismas propuestas, ya que los chicos realizan un trabajo reflexivo previo a la acción. En cuarto grado, se ve claramente que observan, analizan y generan tácitamente una hipótesis, porque se sorprenden si no hallaron lo esperado y expresan "*este no me sale*" o se alegran con el resultado, expresando frases como "*sí, me salió*", descartando el ensayo y error.

Cuando se les presenta un grafo, pueden encontrar recorridos eulerianos, entienden claramente la consigna desde cuarto grado, aunque a esa edad todavía no pueden explicar por qué en algunos casos existe y en otros no. Se divierten, buscan, comparan, insisten en la búsqueda, y se preguntan "*¿por qué este no me da*?", como si fuera algo mágico, sin darse cuenta la cantidad de vértices pares e impares, y cuál es la razón para que no admitan recorrido euleriano.

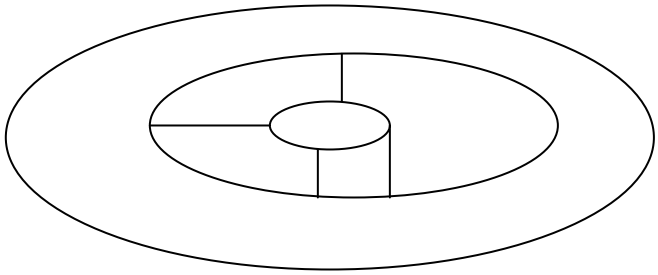
En sexto grado, se dan cuenta que depende de la cantidad de "*salidas y entradas*" a los vértices y logran descubrir la propiedad común de los grafos eulerianos, tanto de los que admiten recorrido euleriano abierto como cerrado. También a esta edad son capaces de crear grafos para desafiar a los compañeros, de agregar aristas para que se tornen "eulerianos", o reconocer si es posible encontrar una buena eulerización.

Con respecto al tema de caminos en el tercer ciclo se trabajó con el concepto de árbol, en particular con el de árbol minimal cubriente. Esto se hizo con el fin de analizar si los alumnos a esta edad son capaces de trabajar de manera algorítmica, cabe aclarar que no se le dan los algoritmos, sino que ellos mismos los descubren, no logran todavía enunciar dichos algoritmos, pero al explicar cómo hallan los árboles minimales cubrientes pudimos detectar la presencia de un razonamiento en este sentido en una mayoría clara de alumnos.

- Coloreo

Este tema no fue trabajado en nivel inicial, sí en los tres ciclos de la Educación General Básica.

En el primer ciclo, atendiendo a que los niños no han trabajado todavía con mapas, se presentó este tema de una manera diferente. Se hizo que ellos coloreen distintos esquemas teniendo en cuenta que a regiones adyacentes debe darse distinto color, los mismos son similares al siguiente:



En un primer momento no se les dijo que utilicen la mínima cantidad de colores, lo que sí fue realizado en una segunda instancia. Grande fue nuestra sorpresa al comprobar que los niños pudieron optimizar los colores en los pasos sucesivos. En este caso particular comenzaron pintando con 6 colores, le dieron a cada zona un color distinto, luego pudieron disminuir pintando con 4 colores y por último lograron hacerlo con 3 colores. Se les pidió que analicen la posibilidad de pintar con 2 colores, intentaron, pero justificaron adecuadamente que no es posible, haciendo mención en cierta manera al hecho de que la región central se encuentra unida con otras 4, que a su vez están unidas entre ellas. De manera similar, se trabajó en otros casos y pudieron pintar correctamente, siempre intentando disminuir la cantidad de colores, comparando con sus compañeros y haciéndonos saber cuántos eran necesarios.

En el segundo ciclo, colorearon los vértices de distintos grafos, en este caso ya existía un análisis extra, debían analizar si entre los distintos elementos a colorear existía o no alguna arista para determinar con qué color debían pintar. Entre el conjunto de grafos que les fueron dados, había algunos que eran planares y otros que no lo eran. En esta actividad se pudo observar que hicieron consideraciones muy interesantes, por ejemplo, al decir: "*aquí tengo un triángulo* (se referían a un subgrafo completo de orden 3), *por lo que por lo menos voy a necesitar 3 colores distintos*" también pudimos escuchar frases como las siguientes: "*me conviene pintar primero el que más aristas tiene, luego pintar todos los que pueden ser pintados con ese mismo color y así seguir*", "*pinto los del triángulo con un color distinto cada uno y luego repito esos colores hasta que me haga falta otro*", "*me equivoqué, puedo cambiar el color entre estos* 2 *vértices y entonces no me hace falta usar un color nuevo*". Esto indica que pudieron encontrar ciertas regularidades necesarias para realizar un coloreo adecuado e incluso ir pensando en forma similar a los algoritmos existentes referidos a coloración.

Es importante destacar que cuando debieron controlar si la cantidad de colores utilizados era la mínima, lo hacían de a pares. En general, observaban en un primer momento el grafo pintado con menos colores, si comprobaban que era correcto, entonces veían como optimizar los colores en el otro.

Otra experiencia realizada en 6° grado consiste en observar la cantidad de colores necesarias para colorear regiones sobre distintas superficies de cuerpos. Los chicos pudieron concluir que sobre una superficie esférica alcanzan 4 colores, la misma cantidad que habían encontrado para el plano. En este ciclo se hizo hincapié en el coloreo de mapas, en realidad la asociación con la esfera fue en términos del globo terráqueo. En cambio, sobre un toroide alcanzan con 7 colores, este es un tema que se seguirá trabajando a posteriori, ya que aún no hemos hecho que los alumnos lleven las regiones del toroide a grafos.

En el tercer ciclo se profundizan los temas trabajados anteriormente. Dentro de las actividades a realizar se le dieron una serie de afirmaciones para que analicen si las mismas eran verdaderas o falsas y en todos los casos se les preguntaba el por qué de dichas respuestas. Las actividades propuestas fueron las siguientes:

*Actividad N*º 1:

a) Elige uno de los grafos que has coloreado.
b) Agrega 2 aristas paralelas a algunas de las que ya tenía.
c) ¿Cuántos colores te hacen falta para colorear el nuevo grafo? ¿Por qué?

En este caso, la gran mayoría de los alumnos justificó en términos generales que la cantidad de colores no variaba, haciendo mención al hecho que ya esos vértices se encontraban relacionados.

*Actividad N*º 2:

a) Construye un grafo bipartito que tenga un conjunto con 6 vértices y otro con 5 vértices.
b) Coloréalo. ¿Cuántos colores te hicieron falta?

c) ¿Y si uno de los conjuntos hubiese tenido 2 vértices menos? ¿Y si eran 4 vértices más? ¿Por qué?

Correctamente contestaron que con 2 colores es suficiente, justificaron mencionando el hecho de que los elementos del mismo conjunto no pueden estar entre ellos, por lo que pueden tener todos el mismo color.

Actividad Nº 3:

a) Realiza un grafo de 5 vértices donde cada vértice esté relacionado con todos los otros y coloréalo.

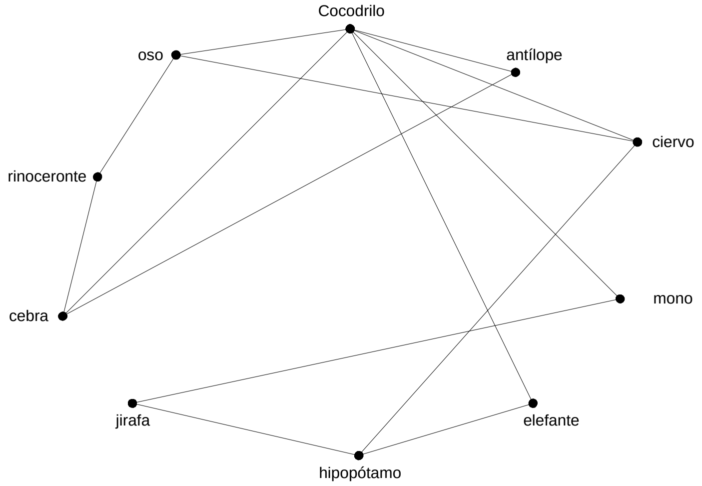
b) ¿Si en lugar de 5 vértices eran 4?¿Y si eran 6? ¿Por qué?

En este caso, la mayoría de los alumnos no necesitó confeccionar todos los grafos, pues se dieron cuenta que harían falta tantos colores como vértices existen, diciendo que esto es así ya que todos los vértices se encuentran relacionados entre ellos.

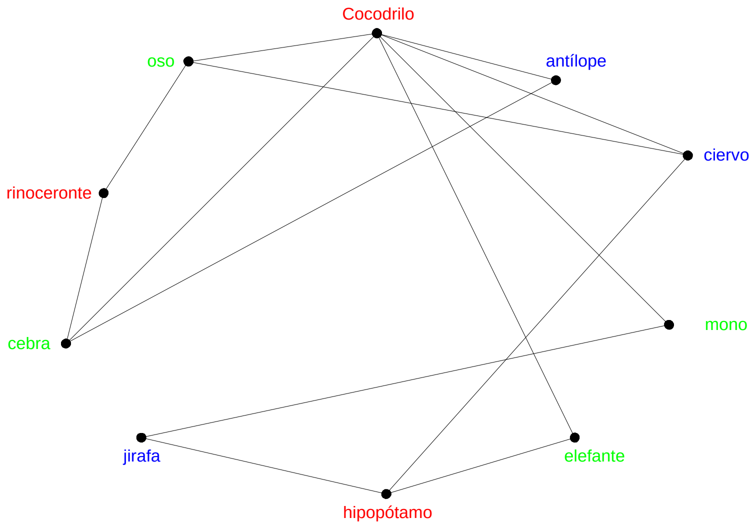
También, en este ciclo se dieron problemas que pueden ser resueltos de manera sencilla utilizando coloreo de grafos, esto con el fin de mostrar la aplicación que tiene el tema. Se presenta, a modo de ejemplo, uno de estos problemas, el enunciado y la resolución del Problema "Las jaulas y el zoológico" se da a continuación:

Parte de un zoológico debe trasladarse y necesitan saber cuántas jaulas harán falta para el traslado de los animales, teniendo en cuenta que hay animales que no pueden estar juntos, a saber: el cocodrilo no puede estar con ciervo, antílope, mono ni elefante; el hipopótamo no puede estar con ciervo, elefante ni jirafa; la cebra no puede estar con rinoceronte, antílope ni cocodrilo; la jirafa no puede estar con el mono y el oso no puede estar junto al ciervo, al rinoceronte ni al cocodrilo".

Para resolver este problema debe construirse un grafo cuyos vértices representen a los 10 animales y las aristas entre ellos indiquen que no pueden estar juntos. A continuación se realiza el grafo correspondiente:



Este grafo debe ser coloreado con la mínima cantidad de colores posibles, esa cantidad es el número cromático del grafo y a su vez será la cantidad de jaulas necesarias para el traslado desde una ciudad a otra. Este grafo ya coloreado es el siguiente:



Como puede observarse el número cromático es igual a 3, por lo que se puede afirmar que harán falta sólo 3 jaulas para el traslado. En una se deberá colocar al cocodrilo, al rinoceronte y al hipopótamo, en otra jaula al mono, al elefante, al oso y a la cebra y en la tercera jaula el antílope, el ciervo y la jirafa. Cabe aclarar que en algunos casos, como en este, existen distintas formas de colorear un grafo, es decir podría haber sido distinta la distribución de colores, por supuesto manteniendo siempre la cantidad, de acuerdo al coloreo realizado es la forma que se distribuirán los animales en las jaulas.

VI) Conclusión

Puede establecerse, a modo de síntesis, que existen distintos argumentos para pensar que sería positivo introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en los programas escolares. En el texto de Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997) se detallan los siguientes puntos:

- <u>Referido a la aplicabilidad</u>: en los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando distintos modelos en distintas áreas.
- <u>Referido a la accesibilidad</u>: para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- <u>Referido a la atracción</u>: existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.

- Referido a la adecuación: a aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada porque les da la posibilidad de un nuevo comienzo.

Sabemos que no es fácil, pero tampoco imposible, llevar esta concepción a la práctica del aula. El resto consiste en buscar estilos de trabajo diferentes y atractivos, nuevas propuestas en forma de juego, experiencias que permitan al alumno esa búsqueda de regularidades para él aún desconocidas, y que favorezcan la formación integral. Haciéndonos eco de este desafío es que intentamos un camino en este sentido y encontramos en este tema materia prima para esta iniciativa.

A partir de las experiencias que hemos llevado a cabo, tanto con niños y con docentes y atendiendo a que un currículo tiene que estar bien articulado a través de los diferentes niveles, nos atrevemos a presentar un sucinto detalle de los contenidos que deberían formar parte de cada uno de ellos.

En el Nivel Inicial, uno de los ejes de la matemática es la construcción del espacio y, considerando que evolutivamente el niño lo percibe "topológicamente", es importante trabajar los conceptos de cierre, vecindad, separación y orden. Sugerimos explorar estas nociones con el cuerpo, para luego llevarlas al plano de la representación gráfica. Con respecto al Primer Ciclo de Educación General Básica se continúa trabajando las propiedades topológicas, con juegos de mayor complejidad y se pueden usar los grafos para representar situaciones concretas. El pensamiento atomizado del niño de esta edad hace que perciba cada problema individualmente, sin aún captar las regularidades, pero sugerimos enfrentarlos a una gran variedad de situaciones diferentes y entretenidas, que irán desarrollando la intuición, base "fértil" para futuras generalizaciones y comprensión de propiedades. En el Segundo Ciclo de Educación General Básica se continúa trabajando con grafos que representen situaciones cotidianas, más complejas que en el nivel anterior, poniendo la mirada en clasificaciones sencillas y en la definición de los elementos del grafo, para estimular la búsqueda de regularidades, discutir sus propias conjeturas y obtener conclusiones. Se dan aquí los primeros pasos hacia la argumentación y formulación de hipótesis, aunque luego la manera de verificarlas o refutarlas siga siendo la realización reiterada de la experiencia. Los alumnos de esta edad están en condiciones de enunciar propiedades y trabajar con los recorridos, por ejemplo, con una planificación previa del camino a seguir, descartando ya el ensayo y error. Por último, en el Tercer Ciclo de Educación

General Básica se producen cambios cognitivos en los alumnos, ellos pueden acceder a un mejor nivel de abstracción y representación que en los años anteriores. Por lo tanto, en este ciclo, se pueden plantear los problemas de grafos como tales, sin necesidad de estar ligados a un problema concreto, realizando razonamientos propios de la matemática discreta. Se propondrán actividades que les permitan explorar, intuir, descubrir, plantear conjeturas, justificando las mismas de manera adecuada, sin llegar a realizar demostraciones formales. En esta etapa se dan los primeros pasos hacia un pensamiento lógico-formal, de manera que estimular la capacidad de conjeturar, hacer uso de las propiedades ya conocidas, realizar justificaciones, descubrir algoritmos, constituyen la riqueza de contenidos apropiados para este ciclo.

Por último y pensando en la proyección a futuro, tenemos la certeza que para poder incluir este tema en las currículas debe pensarse en un cambio gradual, pues la mayoría de los docentes no lo manejan. En varias currículas de la carrera del Profesorado de Matemática, no en todas, se encuentra el tema grafos, pero no se encuentra el tema en la formación de los maestros de nivel primario. Creemos que además de los conceptos inherentes al tema grafos es importante trabajar con los docentes sobre algunas herramientas para la enseñanza del mismo en los distintos niveles, capacitando al docente para que se constituya en guía de la búsqueda de sus alumnos, sin destruirles el placer del descubrimiento y la creatividad.

VII) Bibliografía:

- AUSUBEL, D. 1978. "*Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*". (Trillas, México).
- BRAICOVICH, T. (2005) "*Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*". Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.
- CANTO, F., VALDES, J., RUIZ CABELLO, S. (2007) ¿*Conocía Sherlock Holmes la Teoría de Grafos*?. Revista UNION. Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM). Vol. 10.
- CORIAT, M. *Algunos usos escolares de los grafos*. (2004) Revista de Didáctica de la Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.
- CORIAT, M. SANCHO; J. GONZALVO; P. MARIN; A. "*Nudos y nexos. Redes en la escuela*".. Ed. Síntesis. Madrid.
- COURANT, R. ROBINS, H. (1971). "¿*Qué es la matemática*?". Ed. Aguilar. Madrid.
- CHARTRAND, G. 1985. "*Introductory Graph Theory*". (Dover, Nueva Cork).
- CHIAPPA, R. 1989. "*Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos*". Revista de Educación Matemática. Vol 1. N° 4. Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.

- GUZMÁN, M. 1984. "*Juegos matemáticos en la enseñanza*" Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.
- MENENDEZ VELAZQUEZ, A. *Una breve introducción a la Teoría de Grafos*. (1998) SUMA: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Volumen 28.
- ORE, O. 1981. "*Graphs and their uses*". Mathematical Association of America. DLS-EULER (Editores. Madrid).
- *Principles and Standards for School Mathematics*. (2000) National Council of Teachers of Mathematics. (Reston,Virginia.)
- RIVERO, M. ZANOCCO, P. (1992). "*Geometría: Aprendizaje y Juego*". Ed. Universidad Católica de Chile. Santiago.
- ROSENTEIN, J., FRANZBLAU, D., ROBERTS, F. Editores 1997. "*Discrete Mathematics in the Schools*". Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.
- TORANZOS; F. (1976) "*Introducción a la Teoría de Grafos*". Organización de los Estados Americanos. Buenos Aires.
- WILSON, R. 1979. "*Introduction of Graph Theory*". Longman. New York.