Medir: origen de muchos conceptos matemáticos

Esther Galina[1]

Esta exposición fue presentada en una de las Conferencias en Educación de la XXX Reunión de Educación Matemática y de la LVII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, que tuvo lugar en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba en la semana del 17 al 22 de septiembre de 2007.

Quiero agradecer a los organizadores de la misma por haberme invitado a dictar esta conferencia, a pesar de no ser especialista en Educación Matemática.

En esta conferencia se expusieron algunos ejemplos que dan cuenta de cómo el hombre, en su necesidad de comparar objetos o eventos del mismo tipo, fue creando la forma de cuantificar o de "medir" las propiedades de los mismos, es decir de asignarles números de acuerdo a reglas establecidas. Este proceso produjo la elaboración, y lo seguirá haciendo, de muchos conceptos matemáticos. En esta exposición se intentó vincular este proceso con el interés de "encontrar" la matemática en hechos cotidianos y el papel que pueden jugar los docentes de matemática en este sentido.

1. ¿Qué es medir?

Desde sus orígenes el hombre necesitó comparar objetos o eventos (cantidad de animales para comerciar, las estaciones del año, la temperatura, etc.). Su primer resultado fue la creación del concepto de **número** en el cual no me voy a detener porque ya habrán escuchado muchas veces hablar de ello.

Como instancia posterior a esa conceptualización, en el acto de la comparación, el hombre pudo distinguir diferencias entre las propiedades de los objetos en cuestión. Por ejemplo: si lo que se quiere comparar es la longitud de dos hilos, se puede decir "este es **más** largo o **menos** largo que este otro". Pero estas expresiones no permiten precisar demasiado. Una expresión más precisa es "el primero corresponde a dos veces el segundo". Eso también tiene una dificultad, si queremos compararlo con un hilo que no tenemos en ese momento, no lo puedemos hacer.

Un acto importante en la historia fue cuando el hombre se dio cuenta que para comparar dos objetos podía hacerlo indirectamente a través de un tercer objeto usado como medida estandar o **unidad de medida**. Esto solucionaría el hecho de poder comparar cosas que no se encuentran en el mismo lugar, por ejemplo, siempre que podamos llevar la unidad de medida con uno. Como sabemos, al hablar de longitud, las primeras unidades de medida fueron el pie, el pulgar, el brazo, etc., de las cuales todavía consevamos la denominación en el sistema de medida inglés.

Este hecho permitió que se introdujera la **objetividad** en el acto de comparar. Su significado literal es "acuerdo interpersonal". Si las observaciones se pueden cuantificar de alguna manera, expresarlas en términos de valores, es posible que la comunicación evite interferencias de la particularidad de cada individuo. De esta manera, tanto en la vida cotidiana como en cualquier trabajo que requiera objetividad y precisión, se

[1]Córdoba, 17 de Septiembre de 2007

plantea de qué manera se puede cuantificar o dar valores numéricos a lo que se está observando, es decir **cómo medir** lo que se está observando. Ya teniendo las mediciones se pueden comparar los valores resultantes y obtener conclusiones.

Las mediciones permiten que las descripciones puedan ser comunicadas a otros de manera concreta y objetiva.

Una definición de medición es la siguiente:

Definición 1.1. *Medición* es una asignación de números a objetos o eventos de acuerdo a reglas establecidas.

La posibilidad de medir permitió a otras ciencias o aplicaciones tecnológicas a utilizar la matemática como lenguaje universal. Este lenguaje brinda precisión, sistematización, objetividad y una manera de comunicación de los resultados obtenidos en forma concreta para ser analizados.

Transcribo a continuación la frase con la cual comienza el libro del Profesor en Psicología J. P. Guilford de la Universidad de Southern California [G].

El progreso y la maduración de una ciencia es juzgada a menudo por la amplitud en la cual ha tenido éxito en el uso de la matemática.

Una pregunta que surge es ¿cómo podemos medir cosas que no vienen en forma de números? ¿cómo podemos asignar números a objetos o eventos? La naturaleza, como la conocemos, tiene propiedades que pueden ser representadas por estructuras lógicas de ciertos sistemas de la matemática. Cada individuo que pretenda medir un objeto o evento deberá estar atento a qué estrategia utilizar en cada situación particular.

De acuerdo a lo que hemos dicho el proceso de medición involucra (ver [MG]):

1. *Abstracción:* que capte la esencia de la propiedad a medir permitiendo asignar un valor numérico a cada objeto o evento que posea esa propiedad.

2. *Estrategia:* para poder obtener esos números efectivamente.

3. *Aparato o sistema de medición:* necesario para realizar la medición de acuerdo a la precisión que se desea obtener.

4. *Unidad de medida o sistema de referencia:* con su definición y su patrón.

5. *Operador:* quien determina si se han cumplido los *criterios de observación* para tomar las lecturas en la escala del instrumento.

Evidentemente la matemática aparece en el primer punto. ¿Por qué? Pues antes de poder medir hay que poder asignar, en forma teórica, a cada objeto el número que refleje la propiedad específica de ese objeto. Es decir, la manera en que se podrá obtener una función a valores numéricos, que cuantifique esa propiedad.

Esa función es, en principio como dijimos, teórica.

Ejemplo 1.2. La función “medida de la altura de las personas de esta sala”. No quiere decir que hayamos medido efectivamente a cada persona, pero sabemos qué número asignar que refleje esa propiedad en cada persona de esta sala: por ejemplo el número que se obtenga al determinar la longitud del segmento perpendicular al piso que une el piso con el punto más alto de la cabeza de la persona.

En ese proceso hemos dado sentido en abstracto a la altura como la longitud de un segmento específico.

El segundo punto, la estrategia para obtenerlo en concreto, también involucra el ingenio y la matemática.

Ejemplo 1.3. ¿cómo harían ustedes para medir el mástil de la escuela que está en el patio sin tocarlo?

En este caso, ya sabemos que significa el número que representa la altura, pero no es sencillo obtenerlo directamente porque no nos podemos subir al mástil para tirar desde la punta de arriba el metro, incluso es posible que este no nos alcance. ¡¡¡Aquí también tendremos que hacer uso de las matemáticas!!! Podrían planteárselo a sus alumnos como?... les recomiendo que salgan al patio un dí a de sol.

Ejemplo 1.4. Este lo leí del conocido libro “Matemática ¿estás ahí?” de Adrián Paenza, gran divuldador de la matemática y de las ciencias en general. El problema consiste en medir la cantidad de peces que hay en un lago. Como va a ser imposible dar un valor que refleje la realidad con exactitud, sólo se pretende dar un valor aproximado como respuesta. ¿Cómo podemos hacerlo? La dificultad está en elegir la estrategia a usar que nos lleve a alguna respuesta con sentido. Una estrategia es la siguiente, podría haber otras. En una lancha y con una red de pescadores sacamos una cantidad de peces, digamos 1000, cuidando que no se mueran. De alguna manera los marcamos y los devolvemos al agua. Dejamos un tiempo razonable para que esos peces se mezclen con el resto de los peces del lago y volvemos a sacar la misma cantidad de peces. Contamos los que están marcados, supongamos 10 de los 1000, un 1 %.

Si la probabilidad de encontrar un pez marcado en la red (cantidad de marcados sobre total de peces) es 10/1000, esto nos dice que la cantidad de peces que marcamos (1000) es un 1 % del total de los peces del lago, suponiendo que se mezclaron en forma homogénea.

Conclusión: una estimación del total de peces del lago es 100000!!!

Podríamos hacer lo mismo con porotos dentro de un frasco. Es posible también que los chicos encuentren otras estrategias para este ejemplo.

2. Origen de algunos conceptos matemáticos

Ahora daremos algunos ejemplos de la historia de la matemática que, en el intento de cuantificar objetos o eventos, ha dado lugar a nuevos conceptos de la matemática, o a desarrollar estrategias especiales.

2.1. El número π

Definición 2.1. El número π es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Observemos que ésta es una buena definición porque esa razón es constante, no importa de qué circunferencia se trate. Esto ha sido conocido muchísimo tiempo atrás.

Esta razón ha sido considerada en un texto de la Biblia y el mismo texto fue encontrado en el templo de Salomón construído alrededor del año 950 a.C. El valor dado allí es 3 y seguramente se debió a algún tipo de medición.

En un papiro egipcio del 1650 a.C. hay una buena evidencia de otorgarle a π el valor $4 \times (8/9)^2 = 3{,}16$.

El primer cálculo teórico parece ser el de Arquímides (287-212 a.C.). Obtuvo la aproximación

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

El argumento de Arquímides fue considerar la circunferencia de radio 1, en la que se inscribe un polígono regular de $3 \times 2^{n-1}$ lados con semiperímetro b_n. Por otro lado, considera el polígono regular de $3 \times 2^{n-1}$ lados con semiperímetro a_n en el que la circunferencia está inscripto. Las tres figuras tienen el mismo centro y la circunferencia está entre los dos polígonos (ver la figura en la página siguiente). Las dos sucesiones $b_1, b_2, b_3, \dots$ y $a_1, a_2, a_3, \dots$ convergen al número π.

Usando notación trigonométrica

$$a_n = K \tan(\frac{\pi}{K}), \qquad b_n = K \operatorname{sen}(\frac{\pi}{K})$$

donde $K = 3 \times 2^{n-1}$. Por otro lado,

$$a_n = 2K \tan(\frac{\pi}{2K}), \qquad b_n = 2K \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2K})$$

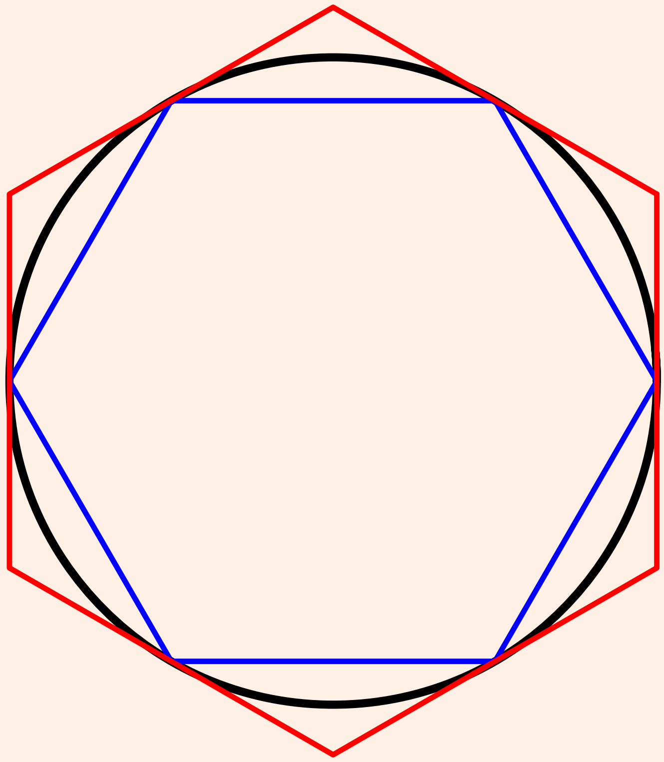
No es difícil mostrar, usando propiedades trigonométricas, que

$$(1) \quad \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = \frac{2}{a_{n+1}} \qquad\qquad (2) \quad a_{n+1} b_n = (b_{n+1})^2$$

Comenzando por $a_1 = 3\tan(\frac{\pi}{3}) = 3\sqrt{3}$ y $b_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, Arquímides calculó a_2 usando la igualdad (1), luego b_2 usando (2), luego a_3 usando (1), y así sucesivamente hasta obtener a_6 y b_6. De esta manera obtuvo que

$$b_6 < \pi < a_6$$

Arquímides no tenía en esa época la ventaja de usar la notación algebraica y trigonométrica que expuse, él obtuvo las igualdades usadas a través de técnicas geométricas.



No hubo grandes avances teóricos en el cálculo de π, recién hasta el siglo XVII. Durante ese período sólo hubo más aproximaciones sobre el mismo razonamiento.

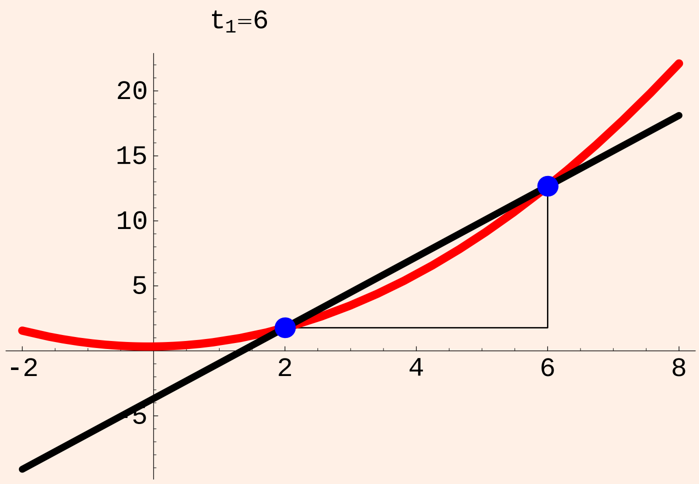
No voy a continuar hablando sobre la historia del cálculo de π. Sólo quería destacar la estrategia matemática que utilizó Arquímides para obtener indirectamente un valor de π estableciendo una noción de límite de sucesiones, concepto desarrollado en el siglo XVII y formalizado recién en el siglo XIX. Para mayor información ver [Pi].

Conclusión: π es el límite de dos sucesiones, una monótona decreciente y otra monótona creciente. Se puede estimar su valor obteniendo los valores de los términos de esas sucesiones.

2.2. La derivada

Aquí nos encontramos con otro ejemplo, en esencia diferente del anterior, y que seguramente conocen.

Paradoja de Zenon (450 a.C.): *Un objeto en movimiento en un instante fijo está quieto. Si en todos los instantes el objeto está quieto ¿por qué se mueve?*



Newton quería captar el movimiento en un objeto matemático. Observó que el movimiento se detecta cuando hay una variación entre los valores de la posición en dos instantes diferentes. El movimiento se ve reflejado al analizar la posición del objeto en todos los instantes al mismo tiempo y no en cada instante por separado. Es decir, esa información está en la función posición del objeto.

Dado un objeto que se mueve, la razón entre la variación de la posición sobre el tiempo que demoró, o *velocidad media* en ese intervalo de tiempo, permite comparar el movimiento en distintos intervalos de tiempo sin importar la longitud de esos intervalos.

Es decir, si $v_m(t_o,t_1)$ es la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t_o,t_1]=[2,4]$ y la posición del objeto es $p(t_o)=0,2$ m en el tiempo $t_o=2$ seg y $p(t_1)=10,2$ m en el tiempo $t_1=4$ seg,

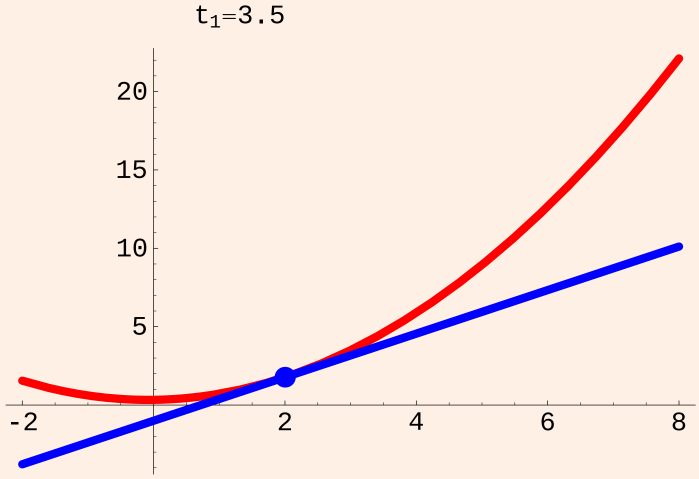
$$v_m(t_o,t_1)=\frac{p(t_1)-p(t_o)}{t_1-t_o}=5 \text{ m/seg}$$

Este valor no es más que la *pendiente* de la recta que une (t_o , p(t_o)) y (t_1 , p(t_1)) por la unidad de medida (ver gráfico más arriba).

Pero bien, si nos preguntamos:

¿Podría asignarle un valor a la velocidad del objeto en cada instante? En otras palabras, ¿cómo medir el movimiento en cada instante? ¿cómo obtener la velocidad instantánea del objeto? En términos actuales, ¿qué es ese número que nos indica el velocímetro del auto en cada instante?

Si graficamos la función posición en términos del tiempo, la velocidad media no es más que la pendiente de la recta que une los puntos del plano $(t_o,p(t_o))$ y $(t_1,p(t_1))$. Como queremos saber el valor en el instante t_o de la velocidad del objeto, tomamos intervalos de tiempo más pequeños, es decir $t_2,t_3,\dots$ cada vez más cercanos a t_o.



Eso significa que a medida que el momento t tiende a t_o las velocidades medias, o las pendiendes de las rectas que unen $(t_o, p(t_o))$ y $(t, p(t))$, se acercan a un valor. Ese valor es el que asignamos como velocidad $v(t_o)$ del objeto en el instante t_o. En simbología actual,

$$v(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{p(t) - p(t_o)}{t - t_o}$$

La pendiente de la recta azul del gráfico de arriba es la medida del crecimiento de la función p en el tiempo t_o . Es la *velocidad instantánea* de p en t_o, o *derivada* de p en t_o Y esto no es más que la derivada de la función posición en t_o.

La creación matemática de Newton está en cómo asignar un valor que mida la variación de posición relativa en cada instante y que esta asignación capte la esencia de lo que quería medir: el movimiento.

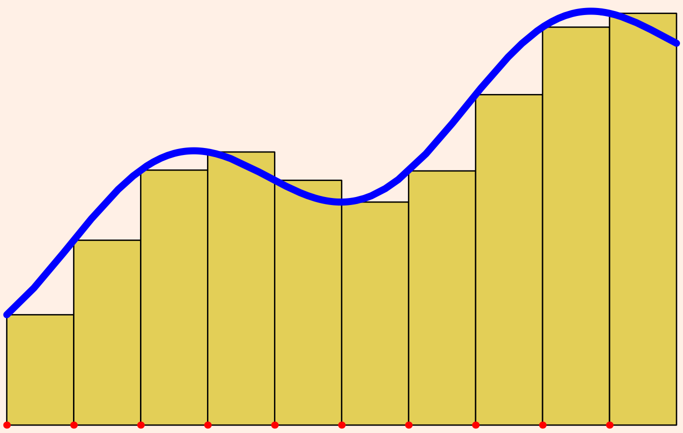
Conclusión: El concepto de *derivada* fue creado para medir el movimiento. Nos permitirá medir la variación relativa o taza de crecimiento de las funciones.

2.3. La integral

¿Cómo medir áreas encerradas por curvas? Podemos definir área de una figura plana como el espacio interior de la figura.

Arquímides usó un método similar para calcular π sacando las áreas de los polígonos regulares como suma de los triángulos equiláteros que lo conforman.

En vez de áreas de polígonos podríamos haber dibujado la circunferencia, o cualquier figura plana, sobre un papel cuadriculado y haber contado la cantidad de cuadritos completos encerrados dentro de la figura. Como fácilmente podemos calcular el área de cada cuadradito, al multiplicarla por la cantidad de cuadraditos daría una aproximación del área de la figura. Si repetimos el proceso con un papel cuadriculado pero con cuadros más pequeños, obtendremos una mejor aproximación de la misma. El límite de ese proceso nos daría el resultado deseado.



¿Cómo medir áreas bajo el gráfico de una función cualquiera y el eje horizontal entre x=a y x=b? Qué tiene que ver esto con el concepto de *integral*? Si ven cualquier libro de Análisis Matemático donde se define la integral de Riemann de una función entre dos puntos, verían que en esa definición está encerrado el proceso que acabamos de describir con papeles cuadriculados con cuadraditos de distinto tamaño. En la definición de la integral de Riemann, en vez de cuadraditos se utilizan rectángulos. Veamos que significa esto dibujando un ejemplo.

El siguiente es el gráfico de la función $f(x) = 0{,}7 + 2{,}1x + \operatorname{sen}(5{,}3x)$ para $a \leq x \leq b$ con $a = 1$ y $b = 3$ mostrado algunos rectángulos donde el tamaño de la base de los mismos es $\frac{b-a}{n}$. Si $n = 10$, el gráfico correspondiente es el expuesto más arriba.

Para $n = 100$, podemos ver lo que sucede en el gráfico de la próxima página.

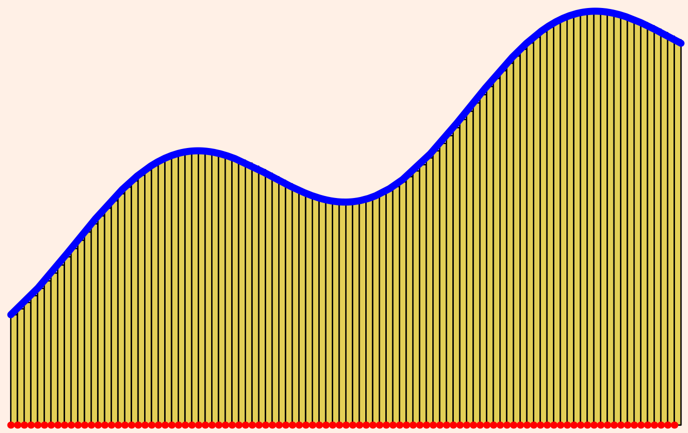
Ese valor del área entre el gráfico de $f(x)$ y el eje horizontal entre a y b es la integral de f entre a y b,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \textit{suma de las áreas de los n rectángulos}$$

Conclusión: La *integral de Riemann* fue creada para medir áreas.

2.4. La probabilidad

¿Cómo medir las chances de ganar en un juego de azar? Por ejemplo cómo podríamos medir la posibilidad que en una tirada de dos dados la suma de siete. Esa respuesta se las dejo a ustedes...



2.5. El grupo fundamental y la Conjetura de Poincaré

Para la topología dos objetos son equivalentes si podemos obtener uno de otro con sólo deformarlo pero sin cortar ni pegar, como si los objetos fueran de plastilina. En este sentido, una esfera, una cámara de autos y dos cámaras de auto pegadas por un punto son distintos objetos. La diferencia es la siguiente: tienen distinta cantidad de "agujeros".

¿Cómo medir la "cantidad de agujeros" de un espacio topológico?

Poincaré (1854-1912) sabía que una esfera estaba totalmente caracterizada por no poseer agujeros. Pero ¿cómo se expresa matemáticamente la propiedad de no tener agujeros?

Se le ocurrió lo siguiente: No tener agujeros es equivalente a suponer que a todo lazo sobre la superficie de una esfera lo podemos encoger, sin salirse de la superficie, hasta que quede convertido en un punto. Esto no pasa con una cámara de autos, a menos que rompamos la cámara o el lazo.

En este sentido se dice que una esfera es *simplemente conexa*, más aún, está caracterizada por esa propiedad. Es decir, toda superficie cerrada y acotada sin bordes simplemente conexa es topológicamente equivalente a una esfera.

Conjetura de Poincaré: Una esfera en el espacio de 4 dimensiones (el conjunto de puntos a distancia 1 de 0 en $\mathbb{R}^4$) es simplemente conexa y está caracterizada por esa propiedad.

Entre 2002 y 2003, Grigory Perelman esbozó una solución al problema, siguiendo el programa de Richard Hamilton, y otros matemáticos completaron algunos detalles que faltaban en la demostración de Perelman. Esta fue la razón por la cual Perelman ganó la medalla Fields en el año 2006, el más prestigioso premio en matemática (en esta ciencia no se otorga premio Nobel), aunque no fue a recibirlo.

En 1961, Stephen Smale la probó para dimensiones mayores que 4.
Muchos conceptos matemáticos fueron creados para hacer esta demostración, como el flujo de Ricci con cirugía, pero no vamos a hablar de eso.

El concepto importante para medir agujeros en espacios topológicos es el *grupo fundamental*, que no es más que el grupo de clases de lazos que parten de un mismo punto. Que dos lazos están en la misma clase o que sean equivalentes significa que se puede obtener uno de otro haciéndolo deslizar sobre la superficie sin cortarlo ni pegarlo, sólo deformándolo.

El grupo de clases de lazos que parten de un mismo punto es efectivamente un grupo en sentido algebraico porque a partir de dos lazos podemos obtener un tercero que parte del mismo punto uniendo el final de uno con el comienzo del otro. En particular, esta operación de lazos dice que si tomamos un lazo y lo unimos al lazo obtenido de recorrer el original en sentido contrario nos da como resultado uno equivalente al lazo constante en el punto de inicio.

Para una superficie cerrada y acotada sin bordes, si ese grupo es equivalente al grupo trivial $\{0\}$, la superficie es simplemente conexa porque la única clase de lazos posibles es la del lazo equivalente a un punto. Por eso se trata de una esfera y diremos que no tiene ningún agujero.

Si ese grupo es equivalente al conjunto $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de pares de números enteros, se trata de una cámara de autos, pues cada lazo se puede obtener combinando dos clases posibles de lazos. Por ejemplo, el lazo obtenido al pasar dos veces la soga a través del agujero en el mismo sentido equivale al par $(2,0)$. Si lo hubiéramos hecho en el sentido contrario, correspondería al par $(-2,0)$. Un lazo associado al par $(0,1)$ sería el obtenido al apoyar la soga por fuera de la cámara a partir de un punto, sin hacerlo pasar por el hueco, y volviendo al mismo punto. Así se podrán obtener todos los lazos posibles sobre la cámara. Perfectamente podrán jugar con una soga y una cámara, o algún obejto similar y convencerse de lo planteado. El sentido común nos dice que la cámara de autos tiene un agujero.

El grupo $\mathbb{Z}^4$ de 4-uplas de números enteros corresponderá al conjunto de clases de equivalencias de lazos en el objeto obtenido al pegar dos cámaras de auto en un cirdulito de la superficie. Este tiene dos agujeros.

Análogamente, el grupo $\mathbb{Z}^{2n}$ está en correspondencia con el conjunto de clases de equivalencias de lazos en la superficie obtenida al pegar n cámaras de auto consecutivamente. Obviamente esta tiene n agujeros.

De este modo, el grupo fundamental permitió clasificar todas las superficies cerradas y acotadas sin borde del espacio. Cualquier superficie con estas caracter ísticas se puede deformar sin cortarla ni pegarla en una del tipo de n cámaras pegadas, su grupo fundamental es $\mathbb{Z}^{2n}$ y tiene exactamente n agujeros.

Los matemáticos decimos que el grupo fundamental es un *invariante topológico*, es decir todos los espacios equivalentes que se obtienen deformando el original sin cortar ni pegar como si fuera de plastilina posee ese mismo grupo fundamental.

Conclusión: El *grupo fundamental* fue creado para medir la cantidad de “agujeros” que tiene un espacio topológico.

3. ¿Qué podemos rescatar del proceso de medir?

Quiero destacar que no soy especialista en Educación Matemática, sólo soy una matemática que se interesa en la Educación y sólo puedo hablar desde mi experiencia de dictar cursos para docentes, de trabajar en talleres con chicos, de analizar propuestas de cursos para docentes.

Coincidiendo con Paenza, creo que es una obligación, de los que sabemos un poco más de matemática, mostrarles a los jóvenes y a la población en general que *la matemática está ahí* .

¿Qué queremos que les quede a los chicos cuando les enseñamos matemática?

Además de todos los conceptos que sabemos que tienen que saber, queremos:

- que puedan **reconocer un problema matemático** en la realidad,
- que adquieran **más habilidades** para resolver problemas cotidianos,
- que puedan comparar objetos o eventos a través de sus medidas para **tomar decisiones con fundamentos precisos**,
- **que disfruten** de resolver un problema.

¡Eso se aprende!

Una vez, dando un curso para docentes de matemática, le pedí a los profesores que me cuenten ejemplos de la realidad que hayan trabajado con los alumnos desde un punto de vista matemático, es decir que me cuenten un problema no áulico de la realidad que lo hayan analizado con los chicos con los lentes de la matemática.

Todas se trabaron para responder, pero finalmente tuve una respuesta que fue la siguiente:

"Cuando íbamos de viaje en el ómnibus a Puerto Madryn con todo el curso, como los chicos estaban aburridos y *como también les doy física*, empezamos a calcular la velocidad media del ómnibus viendo los mojones en el camino. ¡Estaban contentísimos al ver que podían hacerlo!".

Las otras agregaron: "Ah! ese tipo de cosas las hacemos en clase de física, no en clase de matemática".

¿Son los profes de física los responsables de mostrar la matemática que hay en la realidad y de desarrollar el pensamiento matemático en los chicos? Bienvenidos si ellos lo hacen, pero... si nosotros no lo hacemos ¿no les damos una idea errada a los chicos de lo que es la matemática? Como dice Paenza: *¡a la matemática le faltan defensores!*

Los profesores de matemática de nivel medio y los maestros son los **responsables** de alfabetizar matemáticamente a la sociedad. ¡Qué tarea!

Más aún, son los **referentes** de la matemática en el colegio y de la comunidad vinculada al mismo. Son los que **tienen la mirada desde la matemática** de las cosas cotidianas. Son los **encargados de mostrarles** a los jóvenes que la matemática está ahí.

¡La sociedad no ha tomado conciencia de la importancia de su función!

En ese sentido me pareció importante traer el tema de *medir* a esta charla. Como hemos analizado tiene cuatro aspectos importantes:

1. Abstraer el concepto a medir y presentarlo como una función a valores numéricos, o incluso a valores en otro tipo de objetos matemáticos que permitan la comparación (ej: grupo fundamental).

2. Elaborar una estrategia para obtener los valores numéricos efectivamente.

3. Elegir la unidad de medida adecuada.

4. Elegir el aparato para medir apropiado.

Hemos visto distintos ejemplos, tanto de la matemática avanzada, como de la que tenemos a mano, donde los dos primeros aspectos han permitido *crear conceptos nuevos* o *desarrollar un pensamiento creativo y crítico*. Es decir, permitir **hacer matemática**.

¿Podremos desafiar a nuestros alumnos en situaciones similares en la clase de matemática?

Involucrar a los chicos en procesos de medición ¿ nos ayudará a mostrarles que podemos *descubrir* la matemática en todos lados?

¡ La respuesta la tienen ustedes!

Referencias

[G] J. P. Guilford, *Psychometric Methods*, Ed. McGraw-Hill Book Company Inc., 1954.

[MG] A. Maiztegui y R. Gleiser, *Introducción a las Mediciones de Laboratorio*, Ed. Kapeluz, 1980.

[P] A. Paenza, *Matemática ¿estás ahí?*, http://www.dm.uba.ar.

[Pi] *A History of Pi*,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Pi_through_the_ages.html

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba.
email: galina@famaf.unc.edu.ar