Problemas y Soluciones

Coordinador: Leandro R. Cagliero

Invitamos a los lectores a proponer nuevos problemas para compartir y a enviar soluciones por correo electrónico a revm@mate.uncor.edu. Los problemas propuestos deben ser acompañados de una solución y de cualquier comentario que crean apropiado.

Problemas propuestos

1. 100 fichas de reversí

Se tiene una fila de 100 fichas de reversí (son fichas que de un lado son de color blanco y del otro de color negro, las denotaremos con las letras **b** y **n** respectivamente) dispuestas en forma alternada:

b n b n b n b n b n b n b n b n ..... b n b n b n

Se deben poner las fichas de modo que se vean todas del mismo color, con la regla que en cada paso se puede tomar un bloque de fichas contiguas y darlas vuelta a todas al mismo tiempo. Por ejemplo, si tomamos el bloque formado por las fichas desde la 2da hasta la 6ta, entonces éstas cambiarán de **n b n b n** a **b n b n b** y la fila de 100 fichas quedará así:

b b n b n b b n b n b n b n b n ..... b n b n b n.

Problema: Determinar el menor número P tal que con P pasos se logra que las 100 fichas queden del mismo color. Probar que no es posible lograrlo en menos de P pasos.

2. Punto interior en un paralelogramo

El punto O está en el interior de un paralelogramo $ABCD$ y cumple que $\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180°$. Demostrar que

$$\measuredangle OBC = \measuredangle ODC.$$

3. Biyección

¿Existe una biyección $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de modo que f sea un polinomio en dos variables de grado 2 de la forma $f(x, y) = a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+b_1x+b_2y+c$?

Soluciones enviadas

Sistemas de numeración

Enunciado: En este problema p es un número natural mayor que 1 que usamos para escribir los números en base p. La pregunta es la siguiente: ¿para qué números p existe un número de dos cifras x, con cifras a y b (escrito en base p), tal que $2x$ también es de dos cifras pero con cifras b y a? Para esos p determinar el x.

Solución enviada por la Lic. Isabel Viggiani Rocha de la UNTucumán: Los únicos posibles x son de la forma $x = (a, 1 + 2a)_p$, con $p = 3a + 2$, $a \geq 1$.

Sean $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2, x = (a, b)_p$ y $2x = (b, a)_p$. Sabemos que $1 \leq a, b \leq p - 1$ y $a \neq b$ pues si $a = b$ sería $x = 2x$ por lo tanto $x = 0$ que no es un número de 2 cifras en ningún sistema de numeración.

Tenemos entonces que $x = ap+b$ y $2x = bp+a$, por lo tanto $2(ap+b) = bp+a$, de donde $2b - a = p(b - 2a)$. Vamos a considerar las distintas posibilidades:

a) Si $b-2a = 1$ entonces $2b-a = p$. Como también $b = 1+2a$, resulta que $p = 3a+2$ y por lo tanto los x requeridos serán de la forma $x = (a, 1+2a)_{(3a+2)}$. Por ejemplo, son soluciones

$$8 = (1, 3)_5, \quad 21 = (2, 5)_8, \quad 40 = (3, 7)_{11}, \quad 65 = (4, 9)_{14}$$

b) Si $b - 2a \geq 2$ entonces $2b - a = p(b - 2a) \geq 2p$ y por lo tanto $b \geq p + \frac{a}{2}$ lo cual contradice que $1 \leq b \leq p - 1$.

c) Si $b - 2a = 0$ entonces $2b - a = 0$ lo cual implica que $a = b = 0$ lo cual no puede ser.

d) Si $b - 2a = k < 0$ entonces $2b - a = kp$ y por lo tanto $p = \frac{3a+2k}{k} = 3\frac{a}{k} + 2$. Como $k < 0$, resulta que $p < 2$ que no puede ser.